تحليل عقدي ١
السنة الثالثة صباحاً
16 - 11 - 2017
المحاضرة التاسعة

كلية العلوم
قسم الرياضيات
"نظري"

2- الدوال المثلثية:

نعلم أن:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

بالجمع نجد أن:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

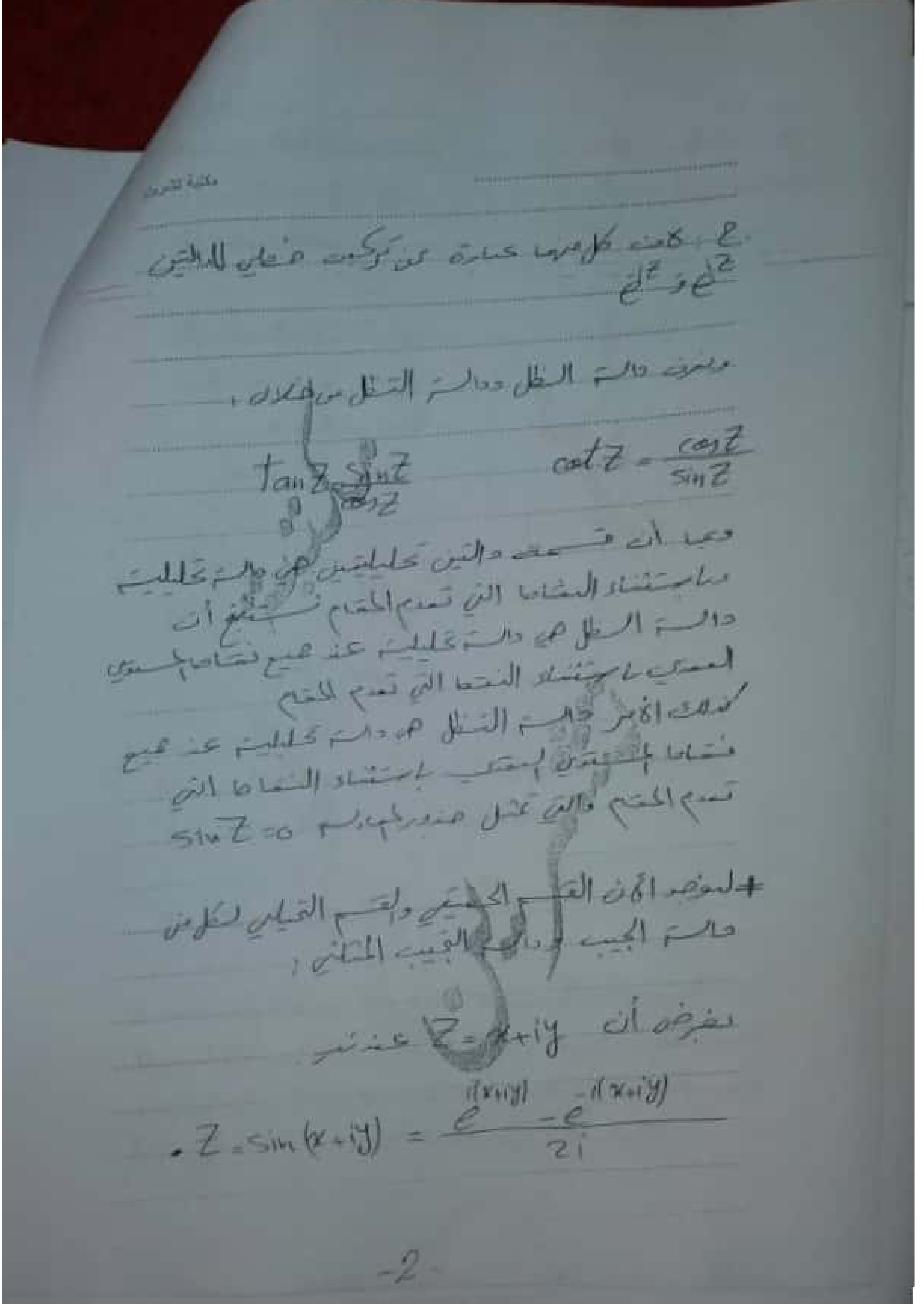
$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

لذلك نعرف دالة الجيب المثلثي والجيب تمام المثلثي بالمتغير العقدي من خلال العلاقتين:

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

* من خلال التعريف السابق نلاحظ أن كل من دالة الجيب المثلثي و دالة الجيب تمام المثلثي هي دالة شاملة (أي أنها دالة قابلة للاشتقاق عند جميع نقاط المستوي العقدي)

لماذا هي دالة شاملة؟؟



ج: لاحظ كل منهما عبارة عن تركيب خطي للدالتين e^{iz} و e^{-iz}

ونعرف دالة الظل ودالة الظل التمام من خلال:

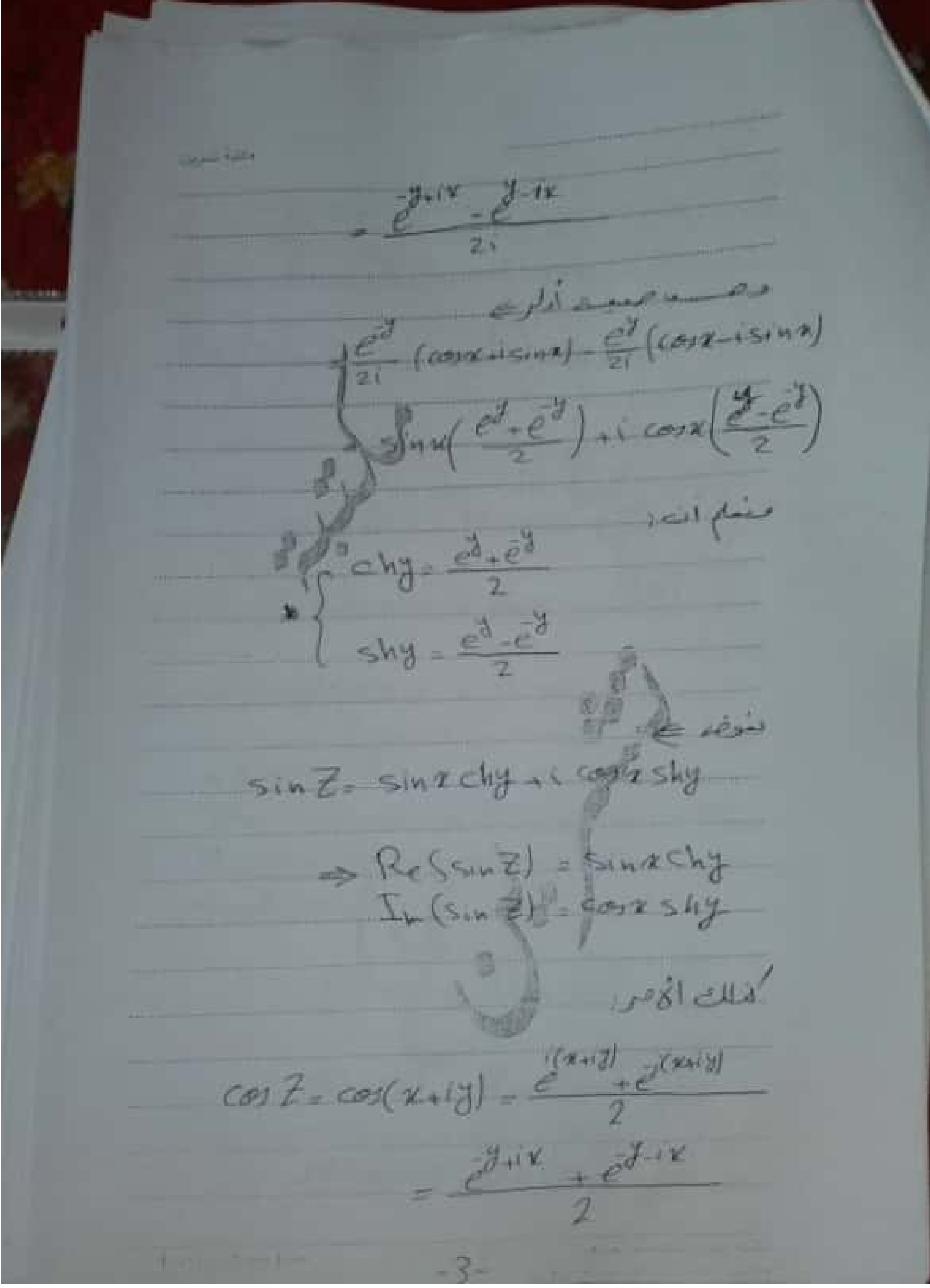
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

وبما أن قسمة دالتين تحليليتين هي دالة تحليلية ما باستثناء النقاط التي تعدم المقام نستنتج أن دالة الظل هي دالة تحليلية عند جميع نقاط المستوي العقدي باستثناء النقاط التي تعدم المقام كذلك الأمر دالة الظل التمام هي دالة تحليلية عند جميع نقاط المستوي العقدي باستثناء النقاط التي تعدم المقام والتي تمثل حلول المعادلة $\sin z = 0$

+ لنوجد الآن القسم الحقيقي والقسم التخيلي لكل من دالة الجيب ودالة الجيب التمام:

نفرض أن $z = x+iy$ عندئذ

$$\cdot\ z = \sin(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}$$



$$= \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i}$$

وحسب صيغة أولر

$$= \frac{e^{-y}}{2i}(\cos x + i\sin x) - \frac{e^{y}}{2i}(\cos x - i\sin x)$$

$$= \sin x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) + i\cos x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

نعلم انه:

$$\begin{cases} ch\,y = \dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2} \\ sh\,y = \dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2} \end{cases}$$

نعوض

$$\sin Z = \sin x \, ch\,y + i \cos x \, sh\,y$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} Re(\sin Z) = \sin x \, ch\,y \\ Im(\sin Z) = \cos x \, sh\,y \end{matrix}$$

كذلك الأمر

$$\cos Z = \cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2}$$

$$= \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2}$$

$$= \frac{e^{-y}}{2}(\cos x + i \sin x) + \frac{e^{y}}{2}(\cos x - i \sin x)$$

$$= \cos x \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) - i \sin x \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)$$

مثلاً استفادة من * نجد

$$\cos Z = \cos x \, ch y - i \sin x \, sh y$$

أي أن:

$$Re(\cos Z) = \cos x \, ch y$$

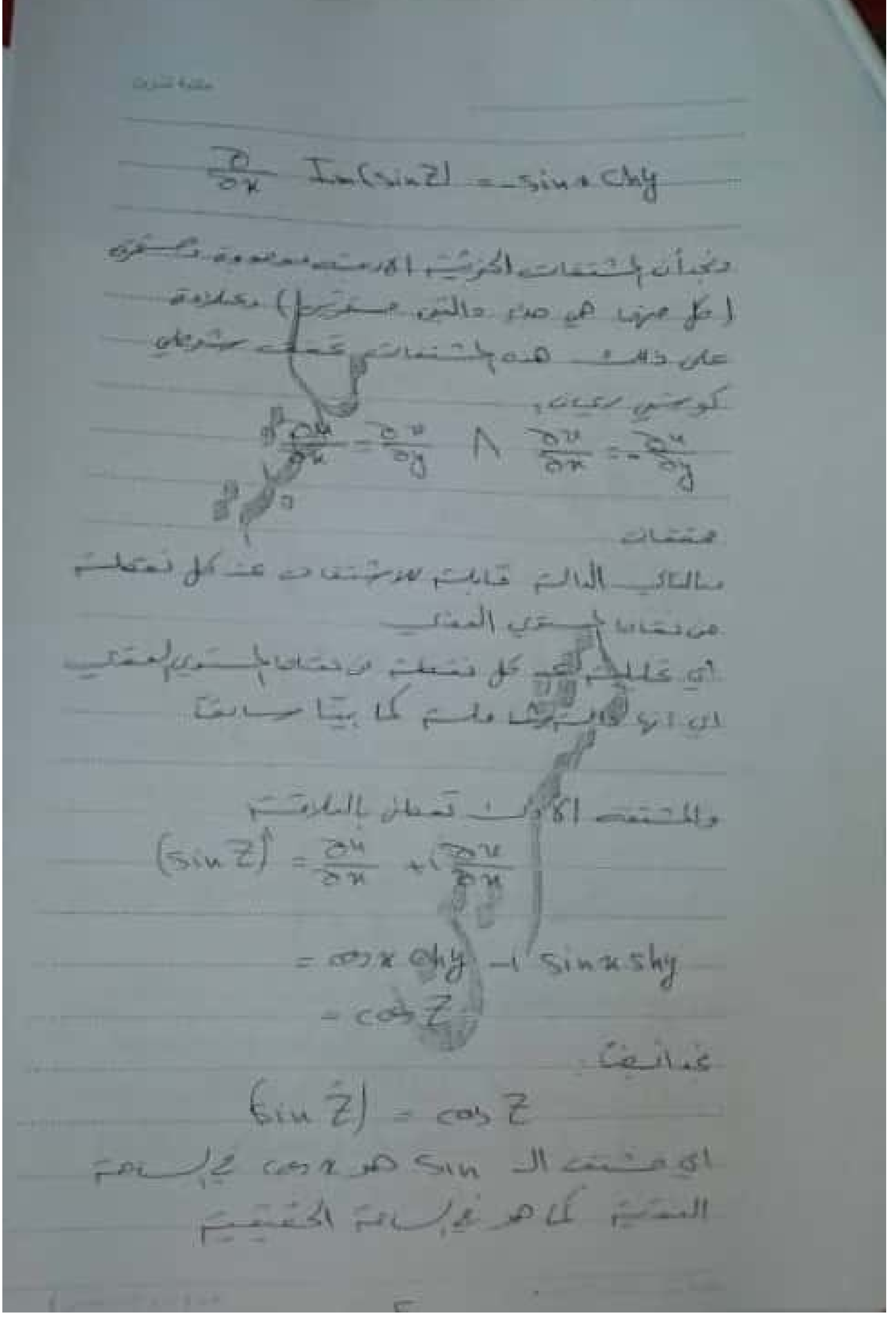
$$Im(\cos Z) = -\sin x \, sh y$$

• لنرهن أن الدالة $\sin Z$ قابلة للاشتقاق، لكي تكون قابلة للاشتقاق يجب أن تكون المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة وتحقق شرطي كوشي ريمان

$$\frac{\partial}{\partial x} Re(\sin Z) = \cos x \, ch y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} Im(\sin Z) = \cos x \, ch y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} Re(\sin Z) = \sin x \, ch y$$



$$\frac{\partial}{\partial x} Im(\sin z) = \sin x \, ch y$$

نجد أن المشتقات الجزئية الأربعة معرفة ومستمرة (كل منها هي صدر دالة مستمرة) علاوة على ذلك هذه المشتقات تحقق شرطي كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

مشتقات

وبالتالي الدالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي

أي قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي أي أنها دالة تامة كما بينا سابقا

والمشتقة الأولى تعطى بالعلاقة

$$(\sin z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

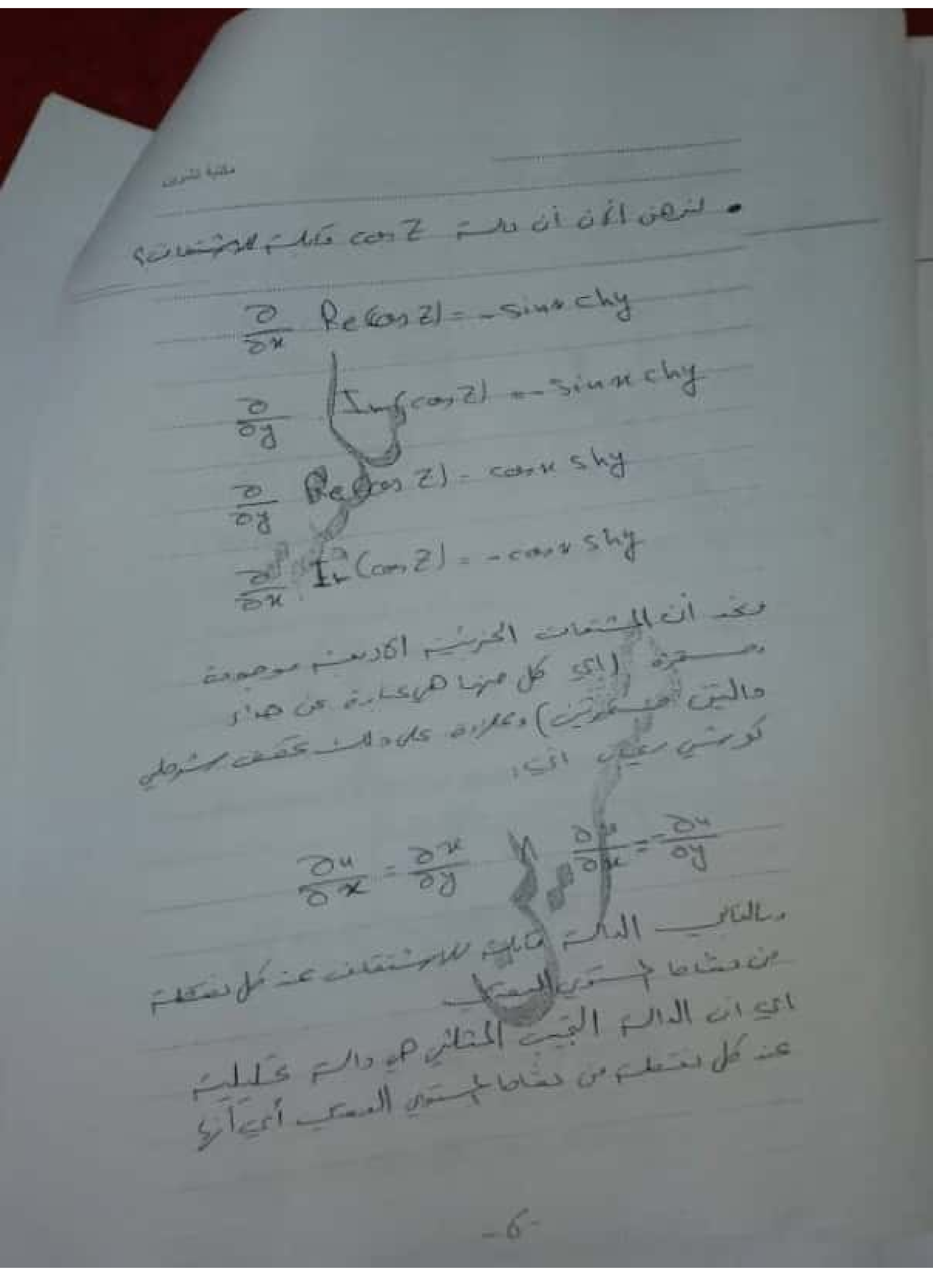
$$= \cos x \, ch y - i \sin x \, sh y$$

$$= \cos z$$

وبالتالي:

$$(\sin z)' = \cos z$$

أي مشتق الـ sin هو cos z على المستوي العقدي كما هو على الأعداد الحقيقية



• لنبرهن الآن أن دالة $\cos z$ قابلة للاشتقاق؟

$$\frac{\partial}{\partial x} Re(\cos z) = -\sin x \, ch y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} Im(\cos z) = -\sin x \, ch y$$

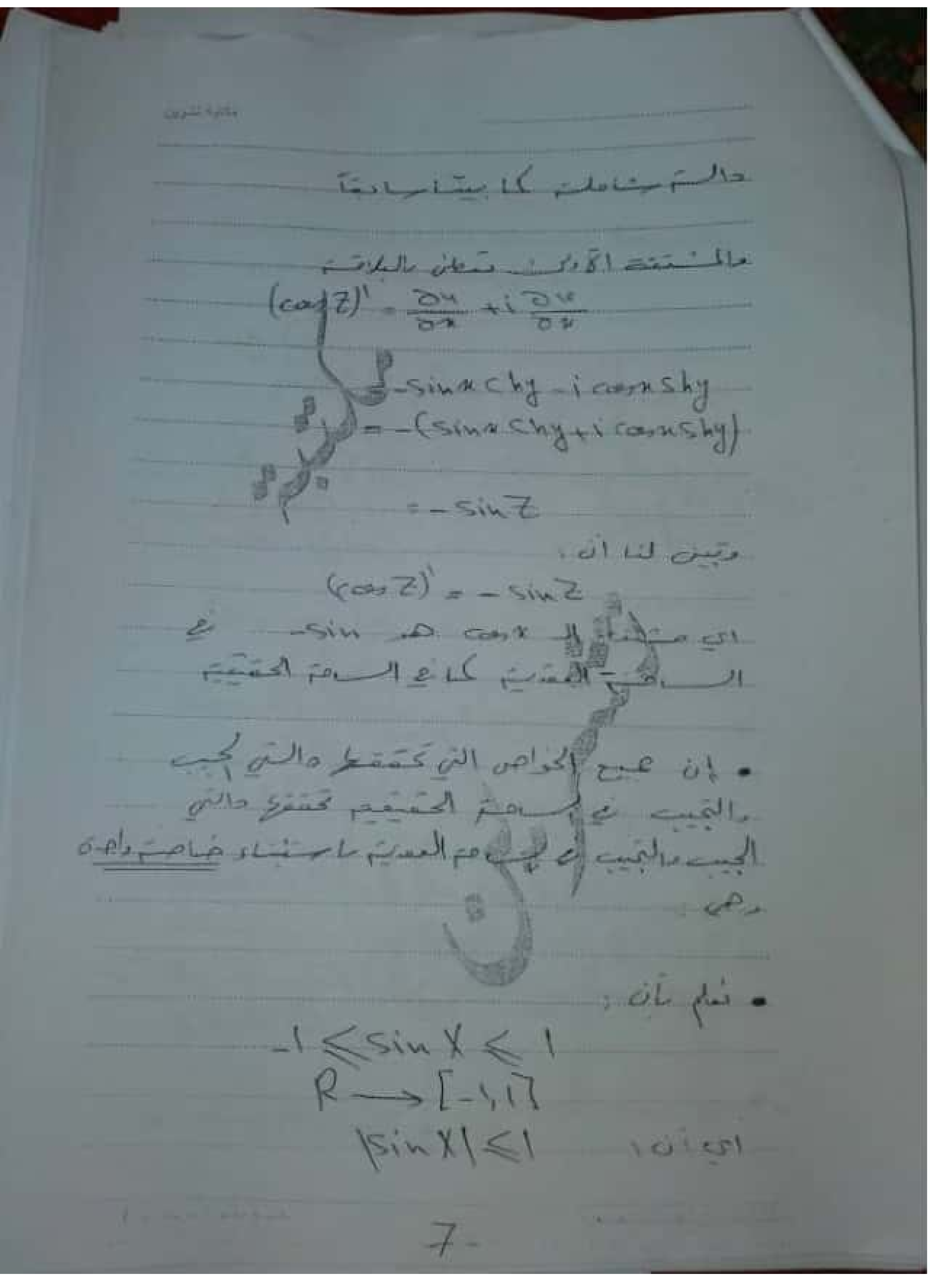
$$\frac{\partial}{\partial y} Re(\cos z) = -\cos x \, sh y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} Im(\cos z) = -\cos x \, sh y$$

نجد أن المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة (أي كل منها هي عبارة عن مقدار والتي مستمرة) وعلاوة على ذلك تحقق شرطي كوشي ريمان أي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

وبالتالي الدالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستوي المركب أي أن الدالة الجيب تمام المثلثي هي دالة تحليلية عند كل نقطة من نقاط المستوي المركب أي أنها



دالتان شاملتان كما بينا سابقاً

والمشتقة الأولى تعطى بالعلاقة

$$(\cos Z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= -\sin x \, ch\, y - i \cos x \, sh\, y$$

$$= -(\sin x \, ch\, y + i \cos x \, sh\, y)$$

$$= -\sin Z$$

ويتبين لنا أن:

$$(\cos Z)' = -\sin Z$$

أي مشتق الـ $\cos$ هو $-\sin$ في الساحة العقدية كما في الساحة الحقيقية

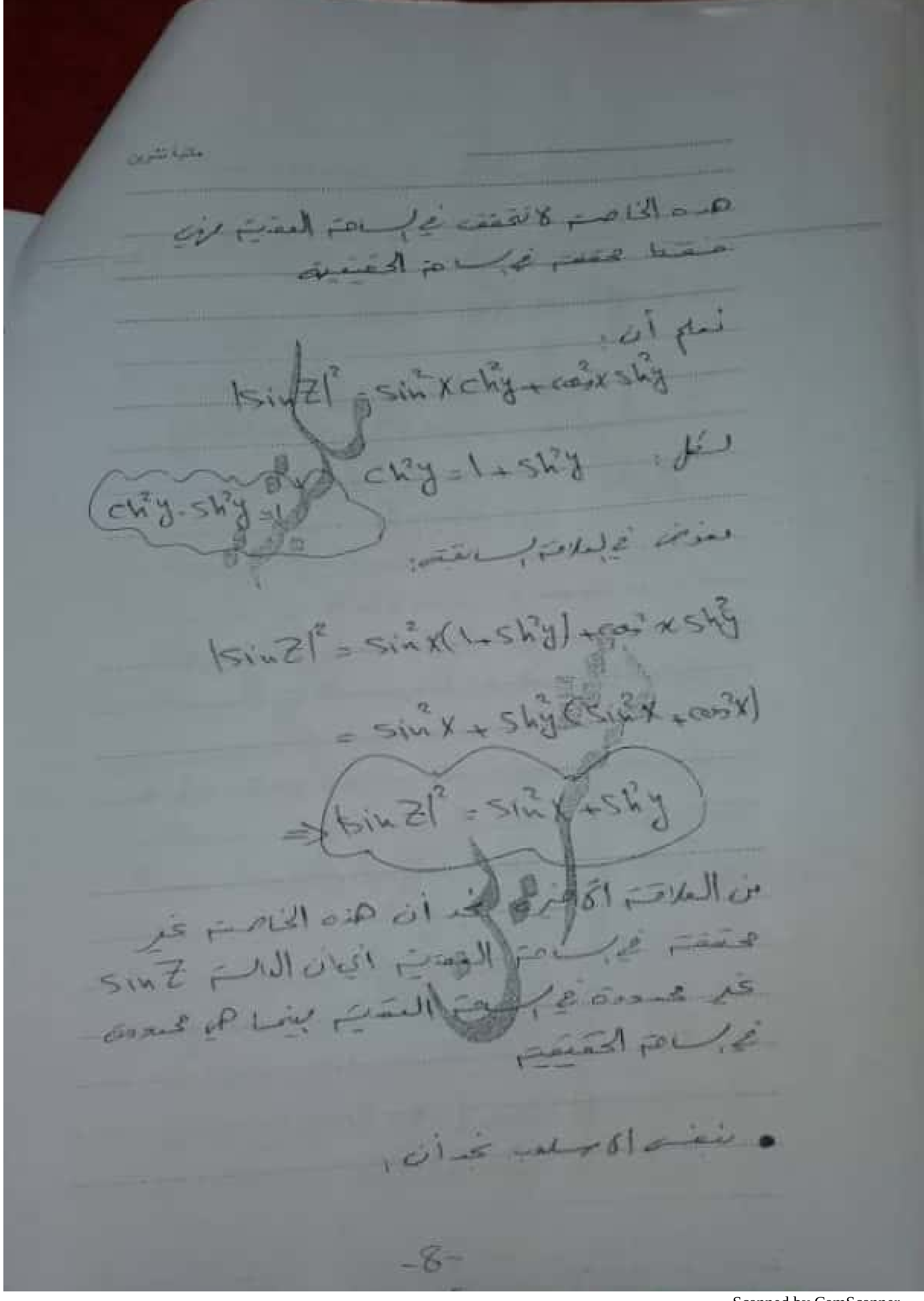
- إن معظم الخواص التي تحققها دالتي الجيب والتجيب في الساحة الحقيقية تحققها دالتي الجيب والتجيب في الساحة العقدية باستثناء خاصة واحدة وهي

- نعلم بأن:

$$-1 \leq \sin X \leq 1$$

$$R \longrightarrow [-1,1]$$

أي أن: $|\sin X| \leq 1$



هذه الخاصة لا تتحقق في الساحة العقدية وإنما فقط تتحقق في الساحة الحقيقية

نعلم أن:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x\, ch^2 y + \cos^2 x\, sh^2 y$$

لكن:

$$ch^2 y = 1 + sh^2 y$$

$$ch^2 y - sh^2 y = 1$$

نعوض في العلاقة السابقة:

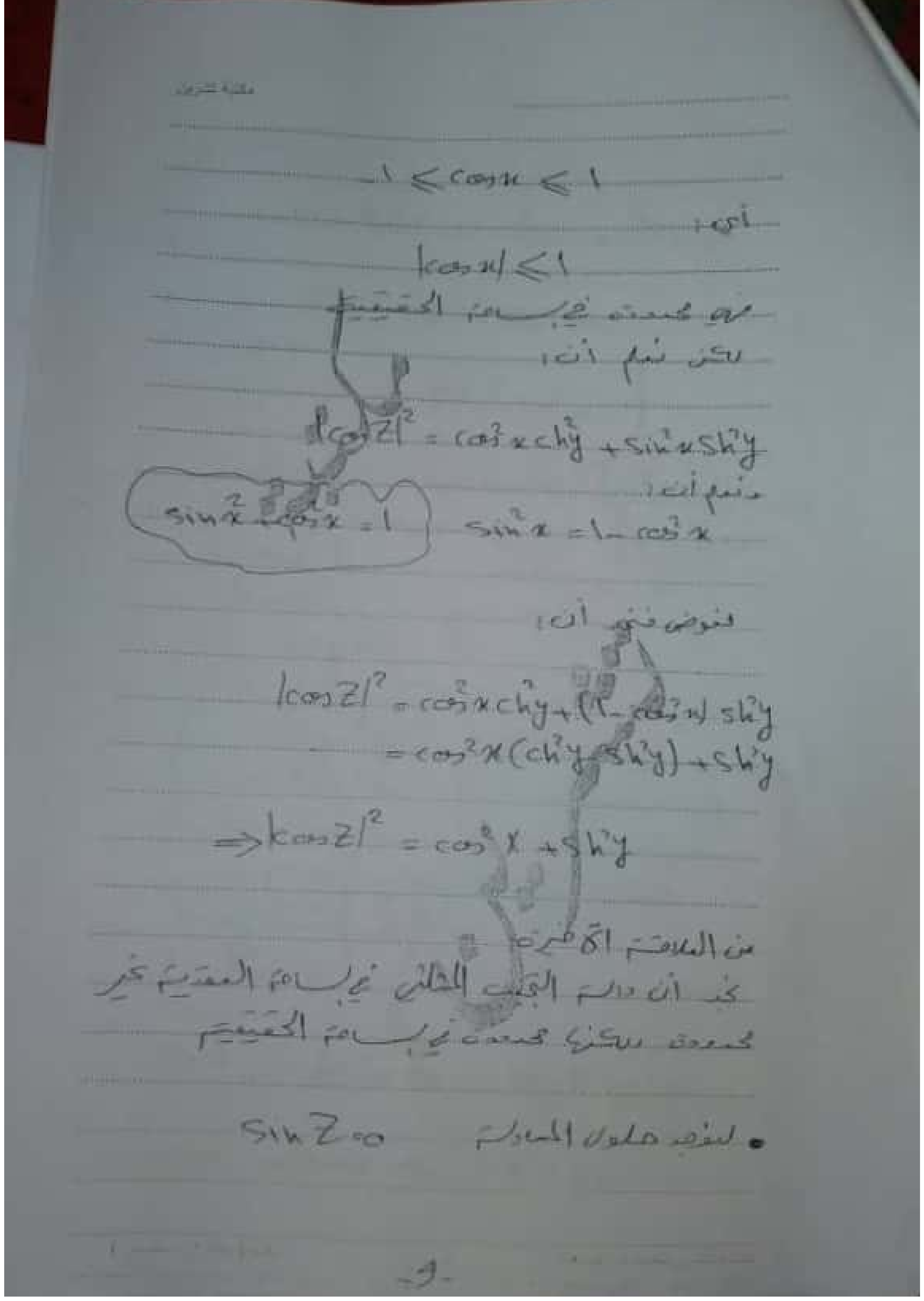
$$|\sin z|^2 = \sin^2 x(1 + sh^2 y) + \cos^2 x\, sh^2 y$$

$$= \sin^2 x + sh^2 y(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Rightarrow |\sin z|^2 = \sin^2 x + sh^2 y$$

من العلاقة الأخيرة نجد أن هذه الخاصة غير محققة في الساحة العقدية أي أن التابع $\sin z$ غير محدودة في الساحة العقدية بينما هي محدودة في الساحة الحقيقية

- بنفس الأسلوب نجد أن:



$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

أي:

$$|\cos x| \leq 1$$

فهو محدود في مجال الحقيقية

لكن نعلم أن:

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \, ch^2 y + \sin^2 x \, sh^2 y$$

ونعلم أن:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

نعوض فنجد أن:

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \, ch^2 y + (1 - \cos^2 x) sh^2 y$$

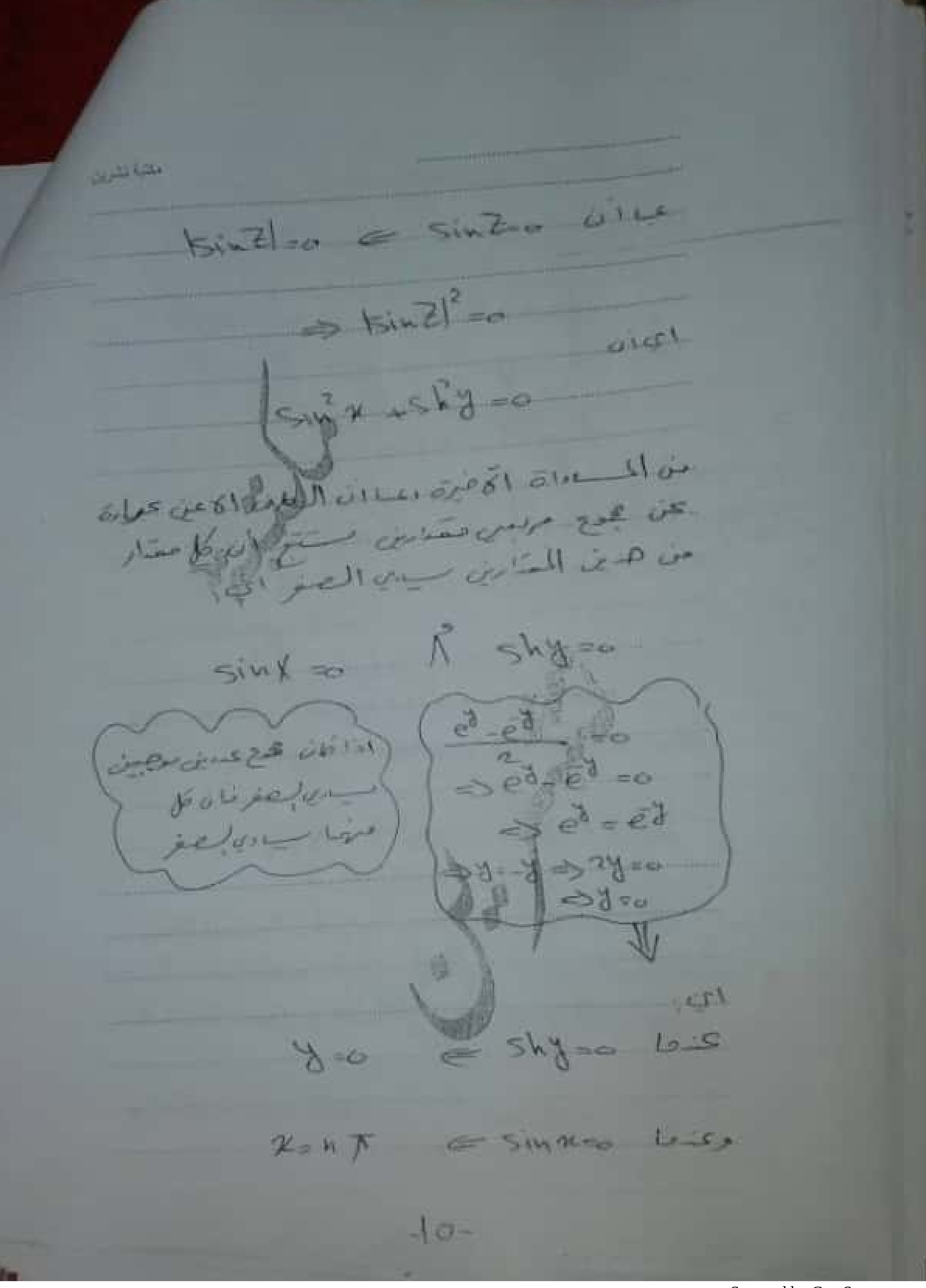
$$= \cos^2 x (ch^2 y - sh^2 y) + sh^2 y$$

$$\Rightarrow |\cos z|^2 = \cos^2 x + sh^2 y$$

من العلاقة الأخيرة

نجد أن دالة الجيب التمام في مجال العقدية غير محدودة بينما محدودة في مجال الحقيقية

• لنوجد حلول المعادلة $\sin z = 0$



عندئذ $\sin Z = 0 \Rightarrow |\sin Z| = 0$

$$\Rightarrow |\sin Z|^2 = 0$$

أي أن

$$\sin^2 x + sh^2 y = 0$$

من المساواة الأخيرة ومساواة الطرف الأول عبارة عن مجموع مربعي مقدارين نستنتج أن كل مقدار من هذين المقدارين يساوي الصفر أي

$$\sin x = 0 \wedge sh\, y = 0$$

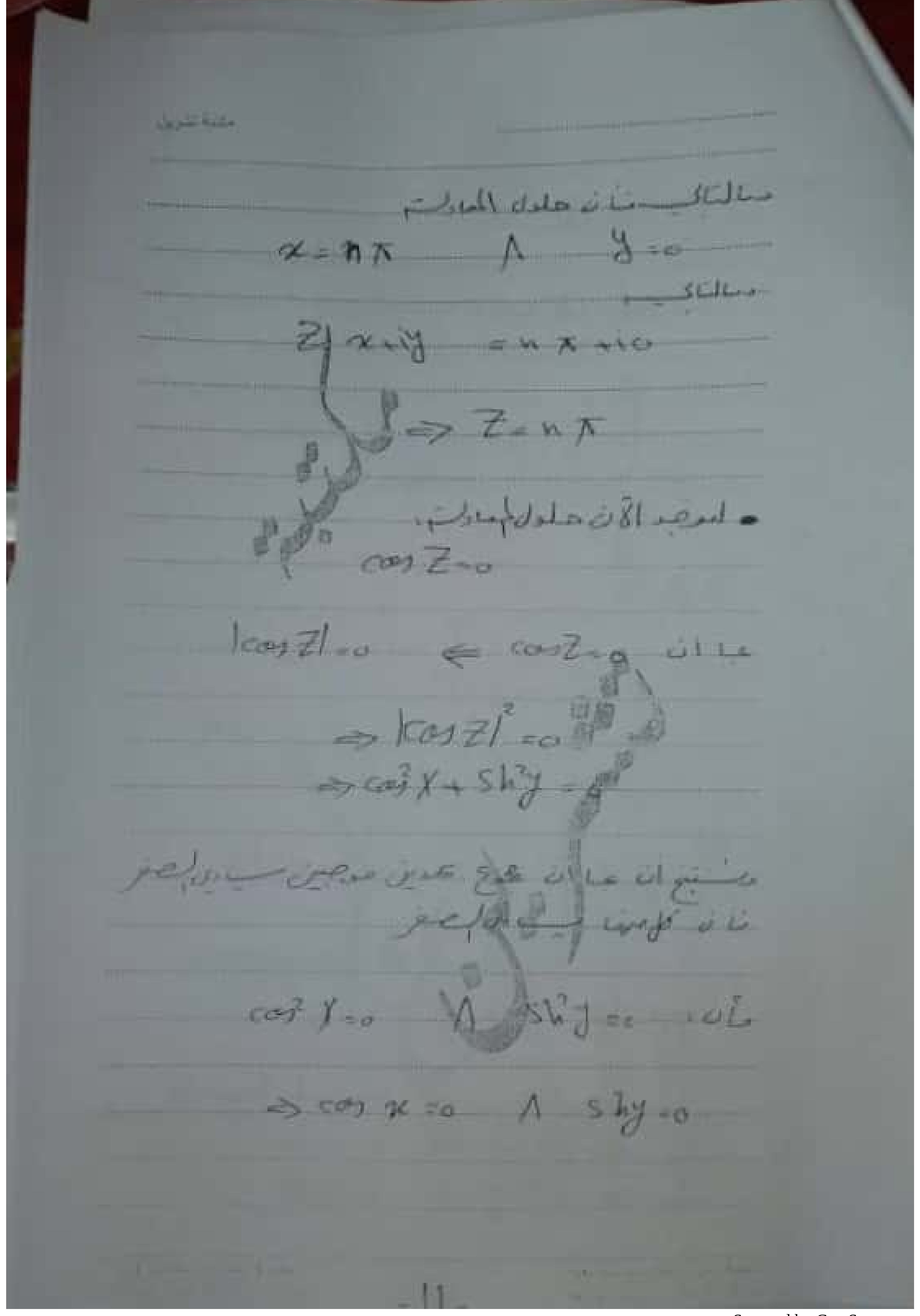
إذا كان مجموع عددين موجبين يساوي الصفر فإن كل منهما يساوي الصفر

$$\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = 0 \Rightarrow e^{y} - e^{-y} = 0 \Rightarrow e^{y} = e^{-y} \Rightarrow y = -y \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

أي:

عندها $sh\, y = 0 \Rightarrow y = 0$

وعندها $\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi$



وبالتالي فإن حلول المعادلة

$x = n\pi \quad \wedge \quad y = 0$

وبالتالي

$z = x + iy = n\pi + i0$

$\Rightarrow z = n\pi$

• لنوجد الآن حلول المعادلة،

$\cos z = 0$

بما أن $\cos z = 0 \Rightarrow |\cos z| = 0$

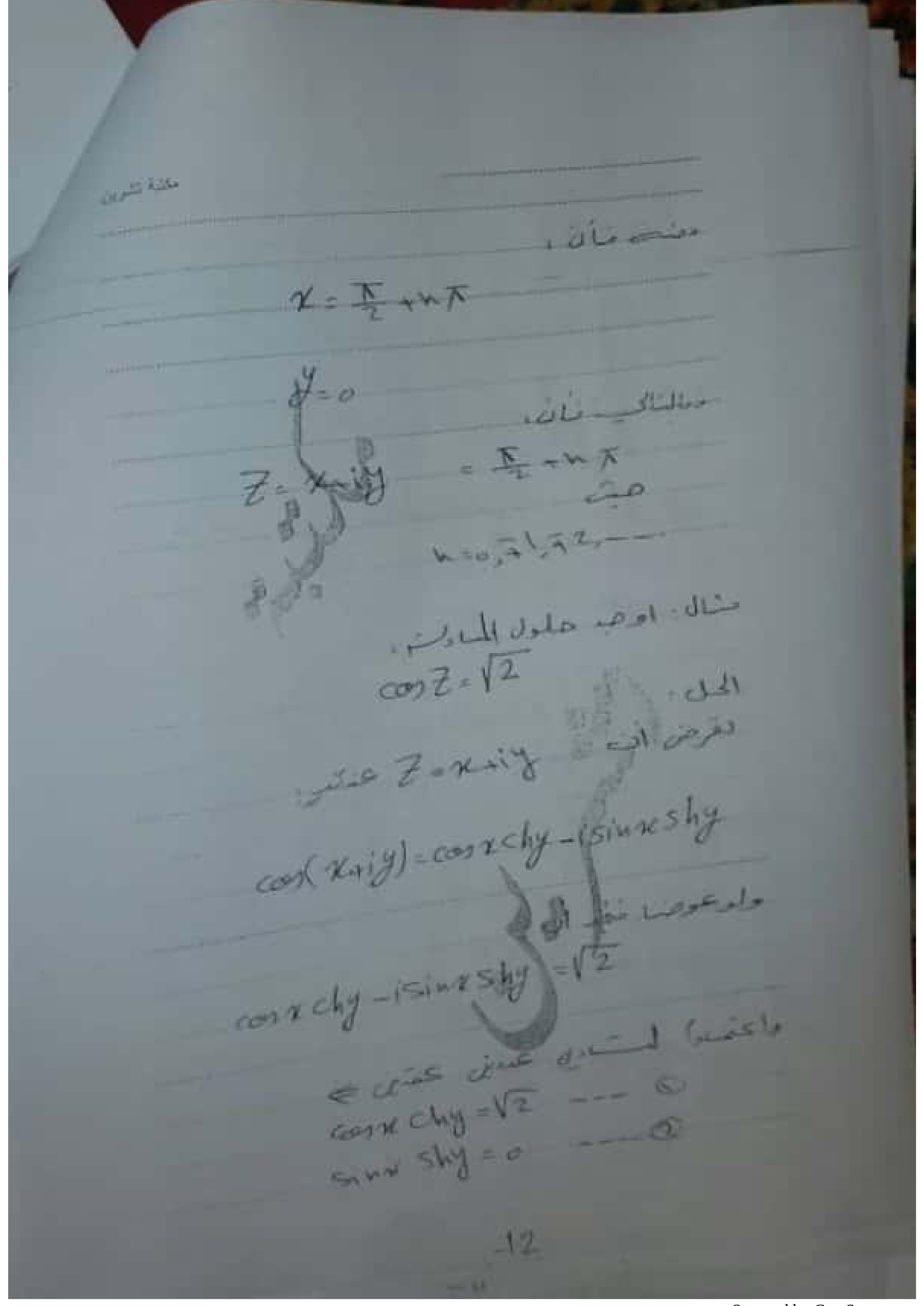
$\Rightarrow |\cos z|^2 = 0$

$\Rightarrow \cos^2 x + \sinh^2 y = 0$

نستنتج أن مجموع عددين موجبين يساوي الصفر فإن كلاهما يساوي الصفر

أي: $\cos^2 x = 0 \quad \wedge \quad \sinh^2 y = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0 \quad \wedge \quad \sinh y = 0$



منحنى مثال :

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$y = 0$$

وبالتالي فان

$$z = x + iy$$

$$= \frac{\pi}{2} + n\pi$$

حيث

$$n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

مثال: اوجد حلول المعادلة:

$$\cos z = \sqrt{2}$$

الحل:

نفرض ان $z = x + iy$ عدد مركب

$$\cos(x+iy) = \cos x \, ch y - i \sin x \, sh y$$

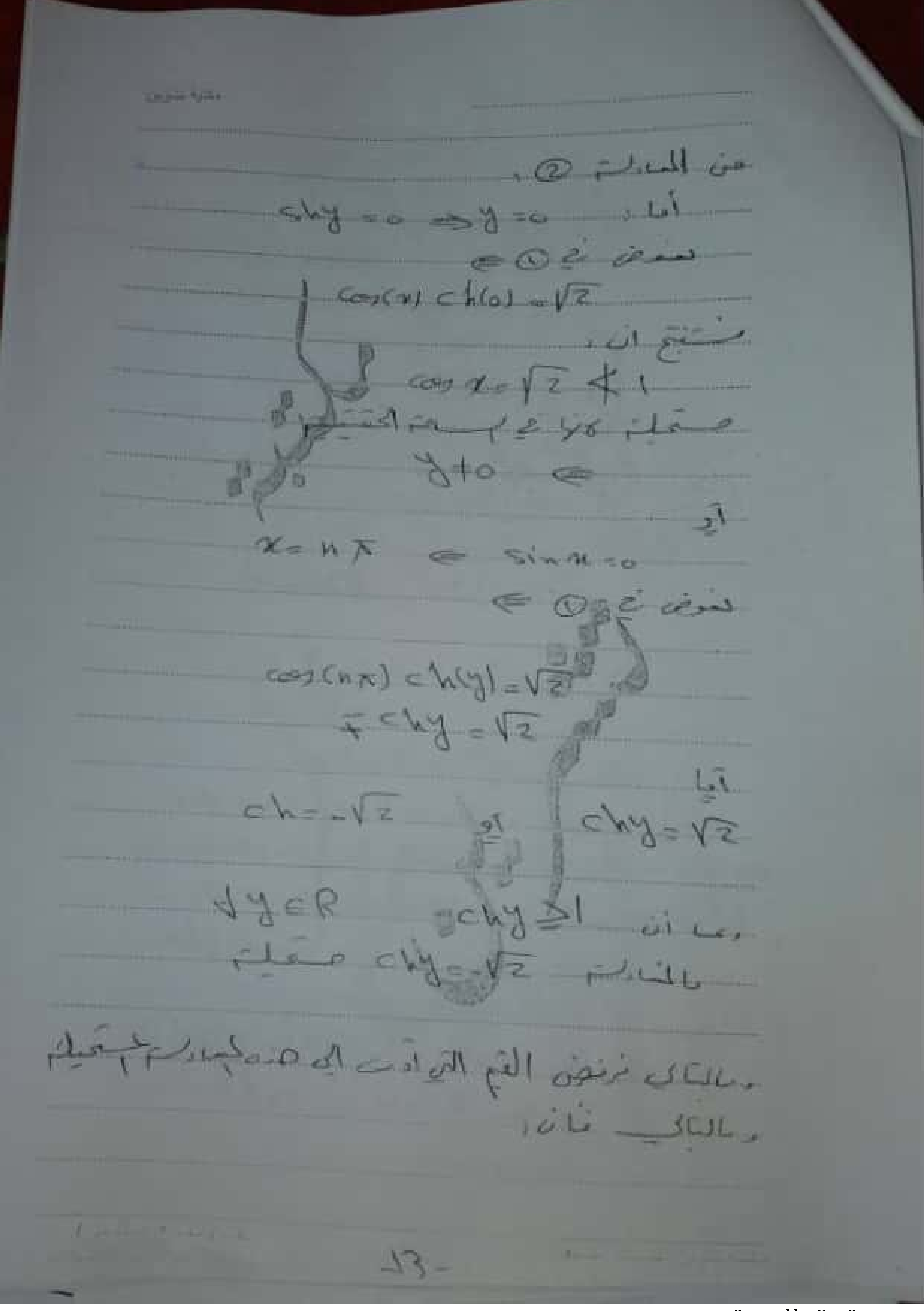
واذا عوضنا في ال

$$\cos x \, ch y - i \sin x \, sh y = \sqrt{2}$$

وباخذ المساواة بين عددين مركبين ⇐

$$\cos x \, ch y = \sqrt{2} \quad --- (1)$$

$$\sin x \, sh y = 0 \quad --- (2)$$



من المعادلة ② :

أما : $shy = 0 \Rightarrow y = 0$

نعوض في ① ⇐

$\cos(x)\, ch(0) = \sqrt{2}$

نستنتج أن :

$\cos x = \sqrt{2} \not< 1$

مستحيل لأن في مجال التعريف

$y \neq 0$ ⇐

أو :

$\sin x = 0$ ⇐ $x = n\pi$

نعوض في ① ⇐

$\cos(n\pi)\, ch(y) = \sqrt{2}$

$\mp chy = \sqrt{2}$

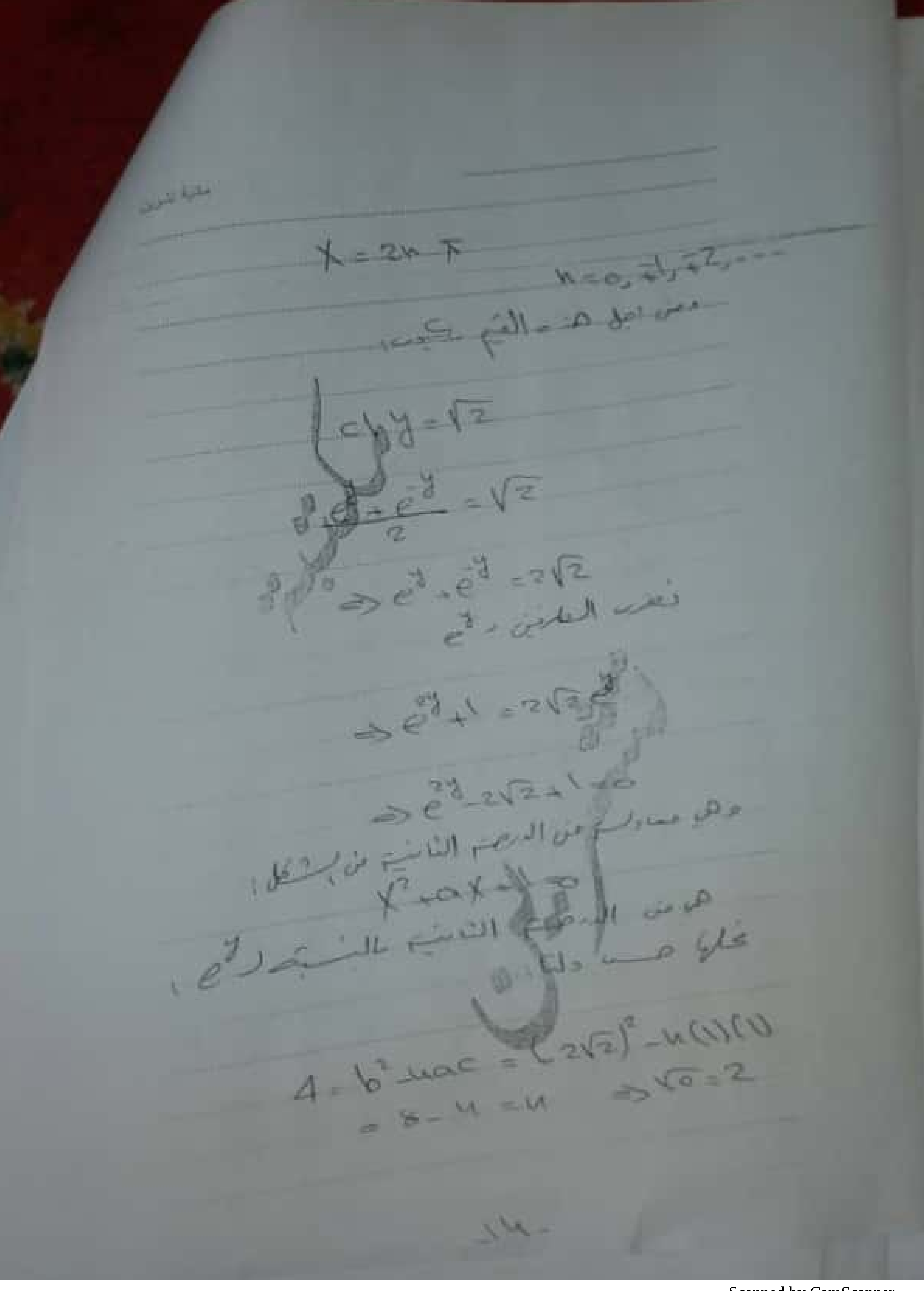
أما $chy = \sqrt{2}$ أو $ch = -\sqrt{2}$

بما أن : $chy \geq 1 \quad \forall y \in R$

بالتالي $chy = -\sqrt{2}$ مستحيل

وبالتالي نرفض القيم التي أدت إلى هذه المعادلة المستحيلة

وبالتالي فإن :



$x = 2n\pi$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

ومن اجل هذه القيم يكون:

$ch\, y = \sqrt{2}$

$\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow e^{y} + e^{-y} = 2\sqrt{2}$

نضرب الطرفين بـ e^{y}

$\Rightarrow e^{2y} + 1 = 2\sqrt{2}\, e^{y}$

$\Rightarrow e^{2y} - 2\sqrt{2}\, e^{y} + 1 = 0$

وهي معادلة من الدرجة الثانية من الشكل:

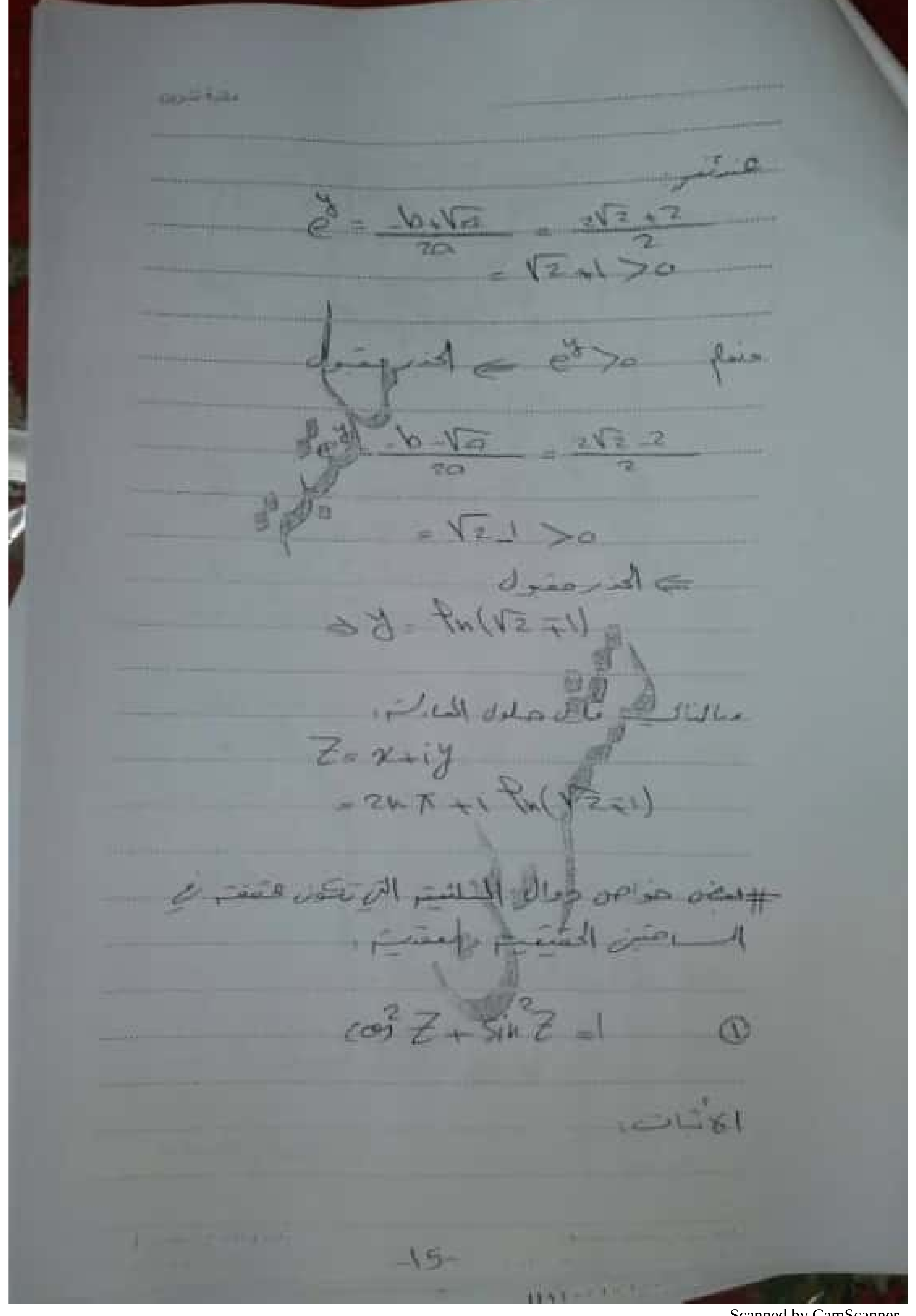
$x^2 + ax + b = 0$

هي من الدرجة الثانية بالنسبة لـ e^{y}

نحلها حسب دلتا:

$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{2})^2 - 4(1)(1)$

$= 8 - 4 = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$



نستنتج

$$e^{y} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2}$$

$$= \sqrt{2}+1 > 0$$

حيث أن $e^{y} > 0$ ⇐ الجذر مقبول

$$e^{y} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2}$$

$$= \sqrt{2}-1 > 0$$

⇐ الجذر مقبول

$\therefore y = \ln(\sqrt{2} \mp 1)$

ومن ثم فإن حلول المعادلة:

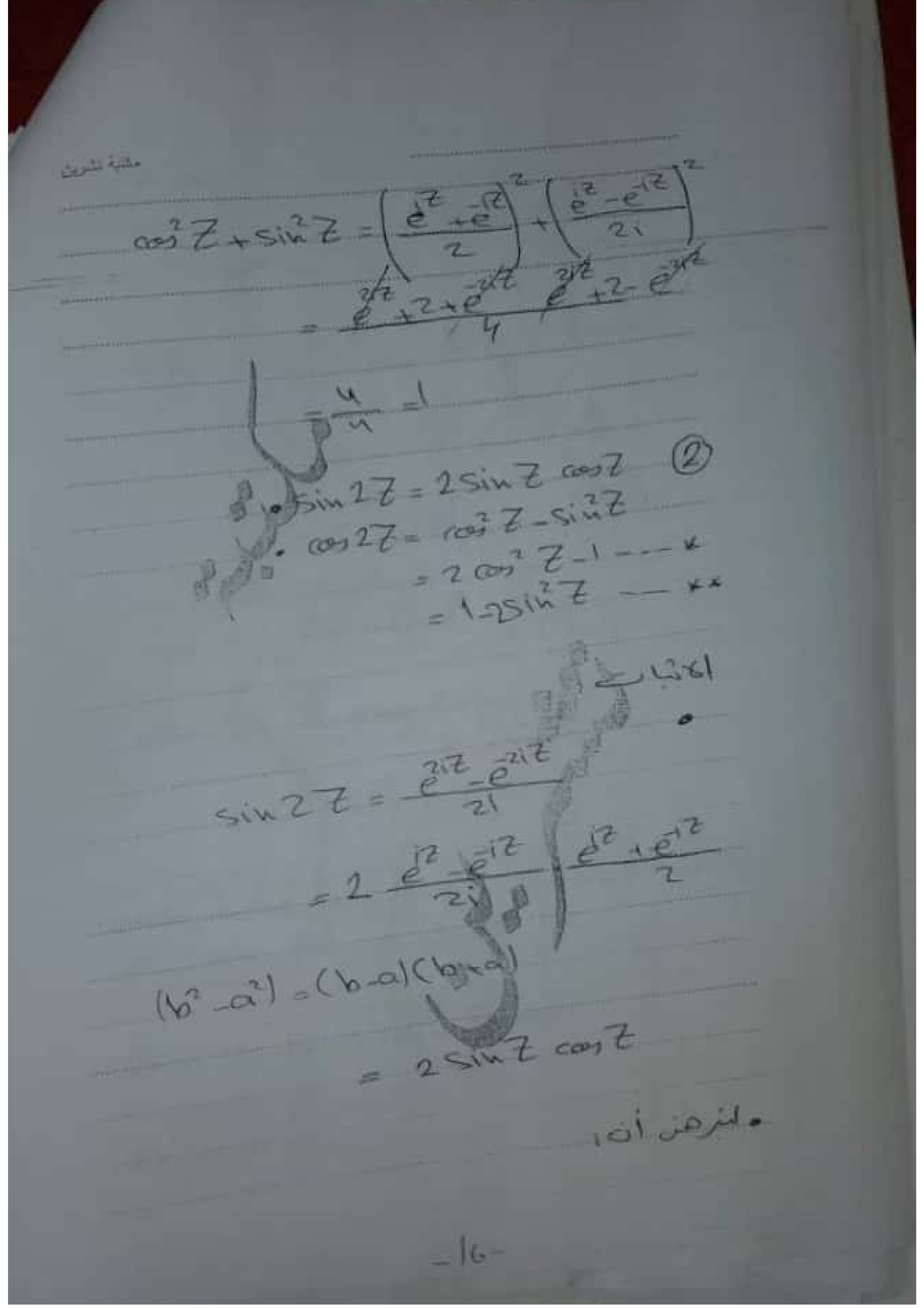
$$Z = x+iy$$

$$= 2k\pi + i\ln(\sqrt{2} \mp 1)$$

بعض خواص دوال المثلثية التي تكون متشابهة في المجالين الحقيقي والعقدي:

① $\cos^2 Z + \sin^2 Z = 1$

الإثبات:



مكتبة الشروق

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz} - e^{2iz}+2-e^{-2iz}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

②

- $\sin 2z = 2\sin z \cos z$
- $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

$$= 2\cos^2 z - 1 \quad --- *$$

$$= 1 - 2\sin^2 z \quad --- **$$

الاثبات

•

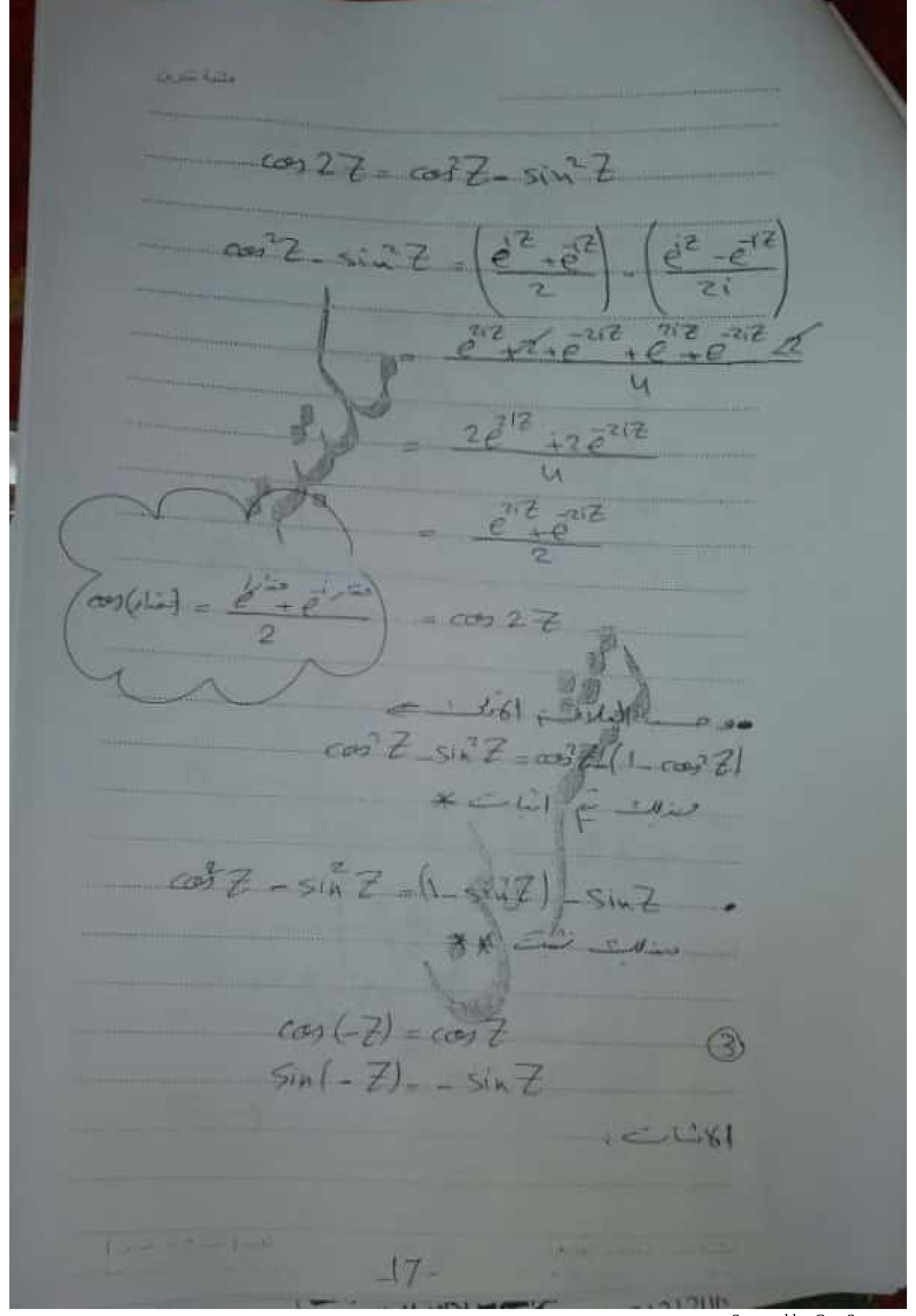
$$\sin 2z = \frac{e^{2iz}-e^{-2iz}}{2i}$$

$$= 2\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$(b^2-a^2) = (b-a)(b+a)$

$$= 2\sin z \cos z$$

• لنبرهن أن:



$$\cos 2Z = \cos^2 Z - \sin^2 Z$$

$$\cos^2 Z - \sin^2 Z = \left(\frac{e^{iZ}+e^{-iZ}}{2}\right) - \left(\frac{e^{iZ}-e^{-iZ}}{2i}\right)$$

$$= \frac{e^{2iZ} + 2 + e^{-2iZ} + e^{2iZ} + e^{-2iZ} - 2}{4}$$

$$= \frac{2e^{2iZ} + 2e^{-2iZ}}{4}$$

$$= \frac{e^{2iZ}+e^{-2iZ}}{2}$$

$$= \cos 2Z$$

$$\cos(\text{الزاوية}) = \frac{e^{i\,\text{الزاوية}} + e^{-i\,\text{الزاوية}}}{2}$$

• ملاحظة الإثبات ←

$$\cos^2 Z - \sin^2 Z = \cos^2 Z - (1 - \cos^2 Z)$$

سنلاحظ تم إثباتها *

• $$\cos^2 Z - \sin^2 Z = (1 - \sin^2 Z) - \sin Z$$

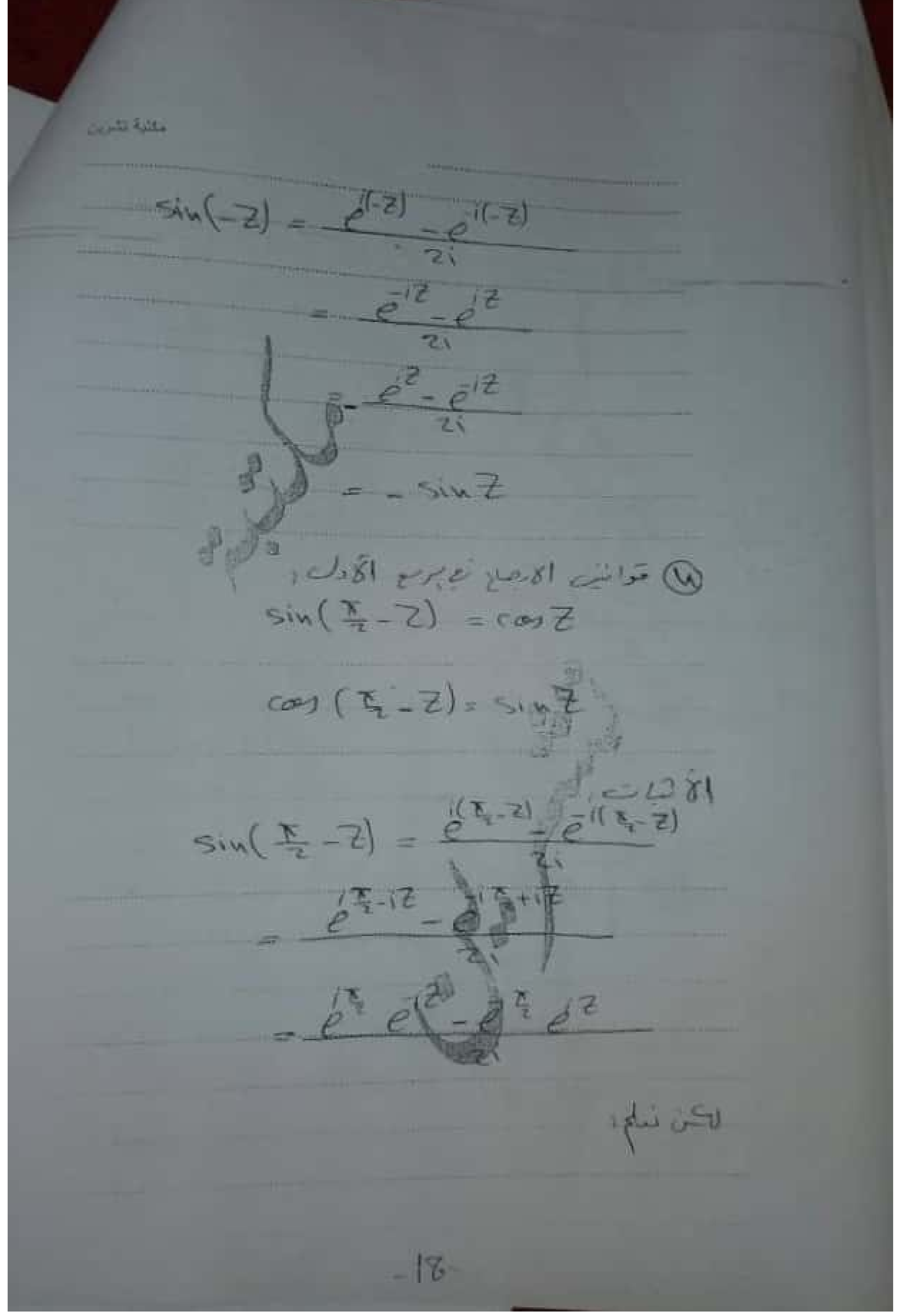
سنلاحظ تم **

(3)

$$\cos(-Z) = \cos Z$$

$$\sin(-Z) = -\sin Z$$

الإثبات :



$$\sin(-Z) = \frac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i}$$

$$= -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$= -\sin Z$$

(٦) قوانين الانسحاب بالربع الأول :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - Z\right) = \cos Z$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - Z\right) = \sin Z$$

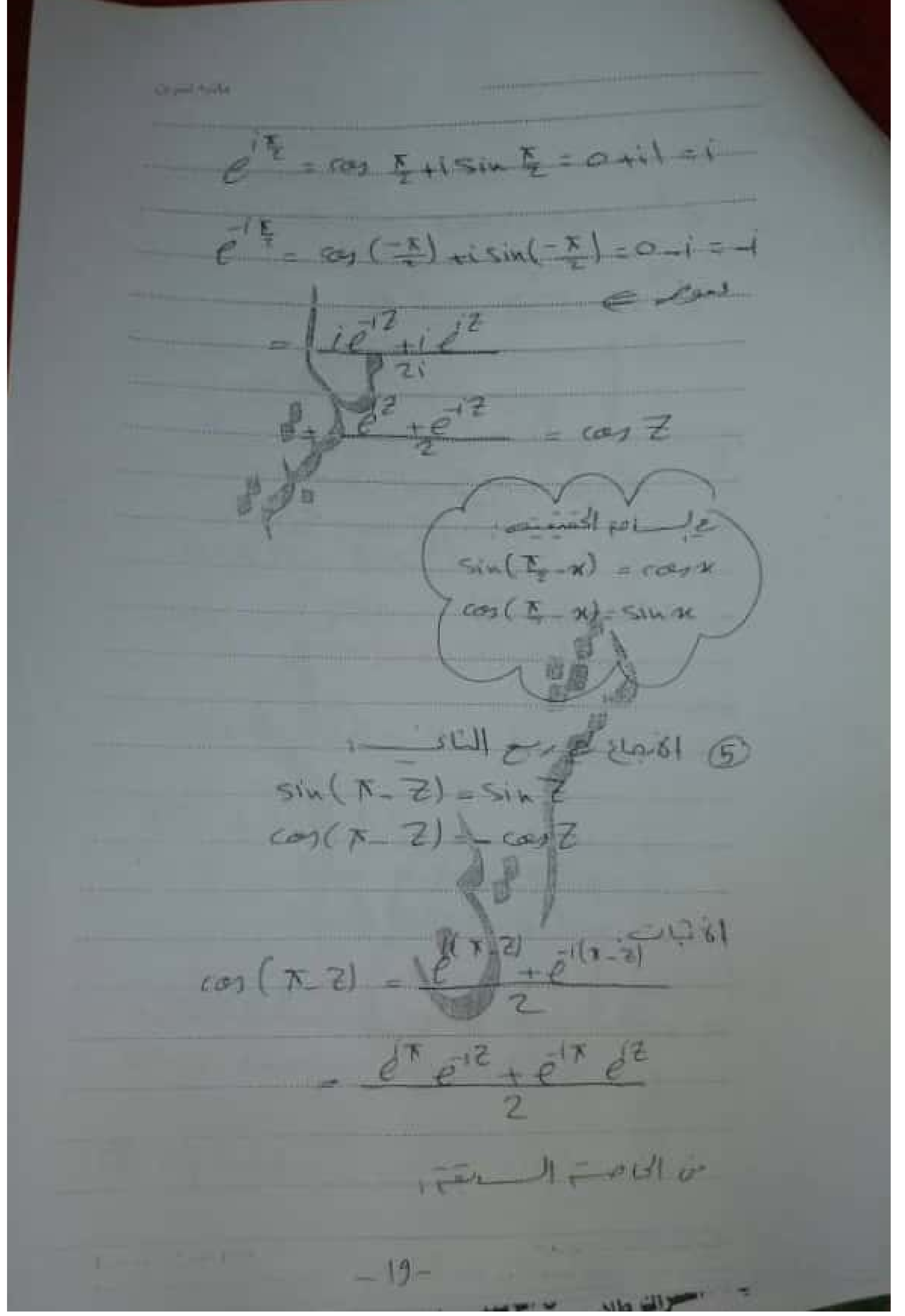
الإثبات :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - Z\right) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{2} - z)} - e^{-i(\frac{\pi}{2} - z)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{2} - iz} - e^{-i\frac{\pi}{2} + iz}}{2i}$$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-iz} - e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{iz}}{2i}$$

لكن نعلم :



$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i1 = i$

$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0 - i = -i$

نعوض e

$= \frac{i e^{-iz} + i e^{iz}}{2i}$

$= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$

عل السابق النتيجة:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

(5) اقترح مع التالي:

$\sin(\pi - z) = \sin z$

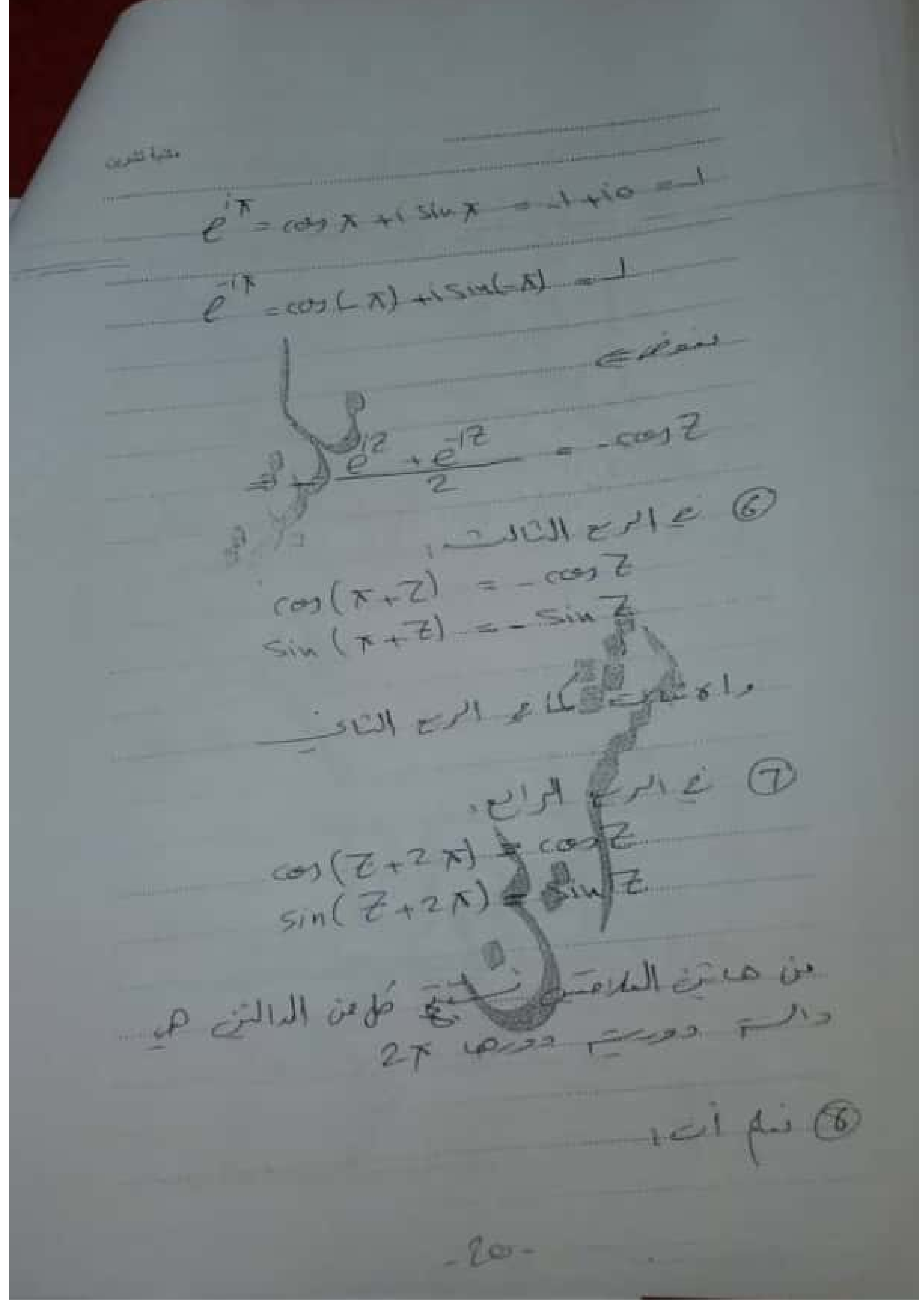
$\cos(\pi - z) = -\cos z$

الاثبات:

$\cos(\pi - z) = \frac{e^{i(\pi - z)} + e^{-i(\pi - z)}}{2}$

$= \frac{e^{i\pi} e^{-iz} + e^{-i\pi} e^{iz}}{2}$

من الخاصية السابقة:



$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i0 = -1$

$e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$

بمعرفة ⇐

$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -\cos z$

⑥ في الربع الثالث :

$\cos(\pi + z) = -\cos z$

$\sin(\pi + z) = -\sin z$

وإلا نشوف كما في الربع الثاني

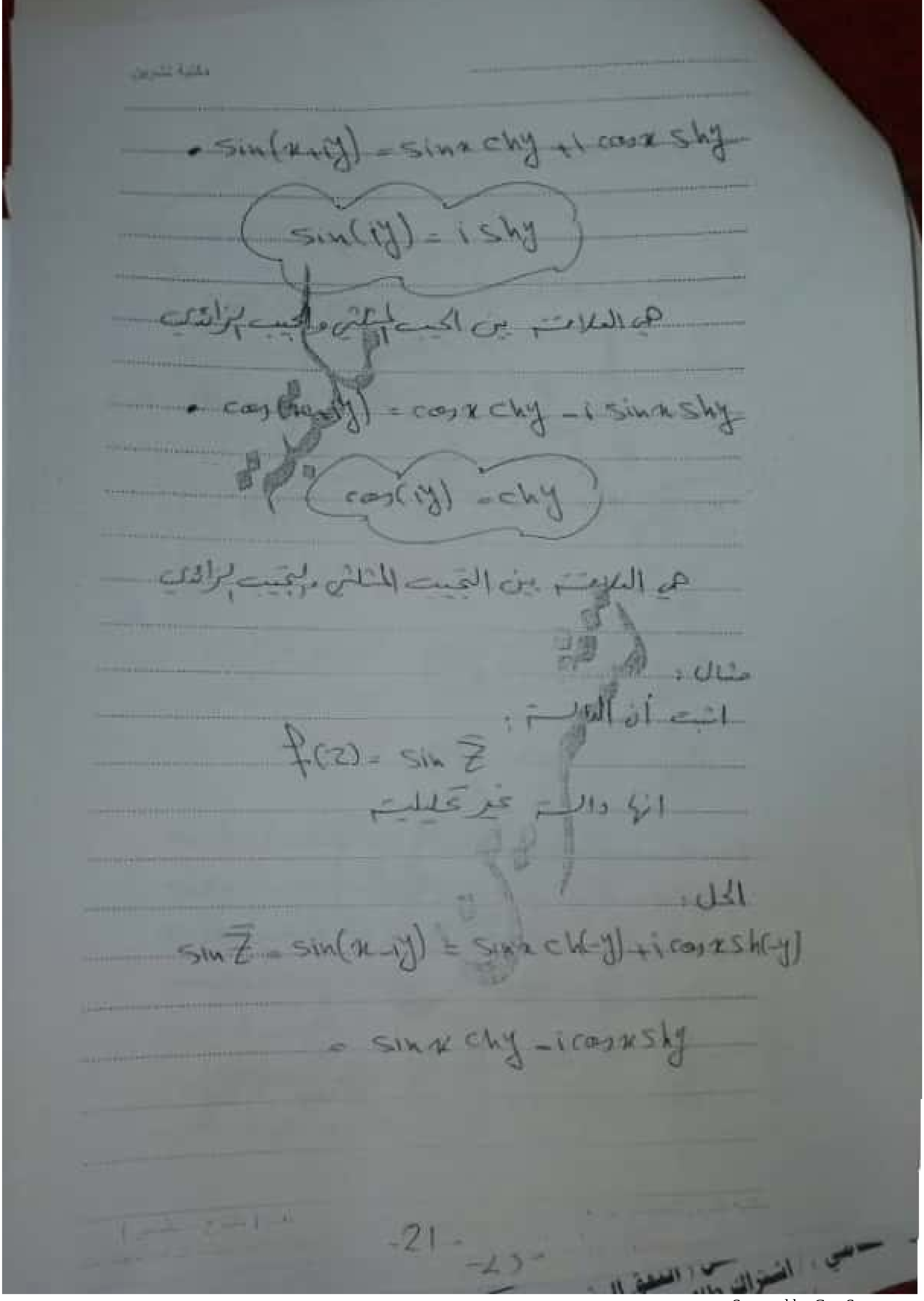
⑦ في الربع الرابع :

$\cos(z + 2\pi) = \cos z$

$\sin(z + 2\pi) = \sin z$

من هاتين العلاقتين نستنتج كل من الدالتين هي دالة دورية دورها 2π

⑧ نعلم أن :



- $\sin(x+iy) = \sin x \, ch y + i \cos x \, sh y$

$$\sin(iy) = i \, sh y$$

هي العلاقة بين الجيب المثلثي والجيب الزائدي

- $\cos(x+iy) = \cos x \, ch y - i \sin x \, sh y$

$$\cos(iy) = ch y$$

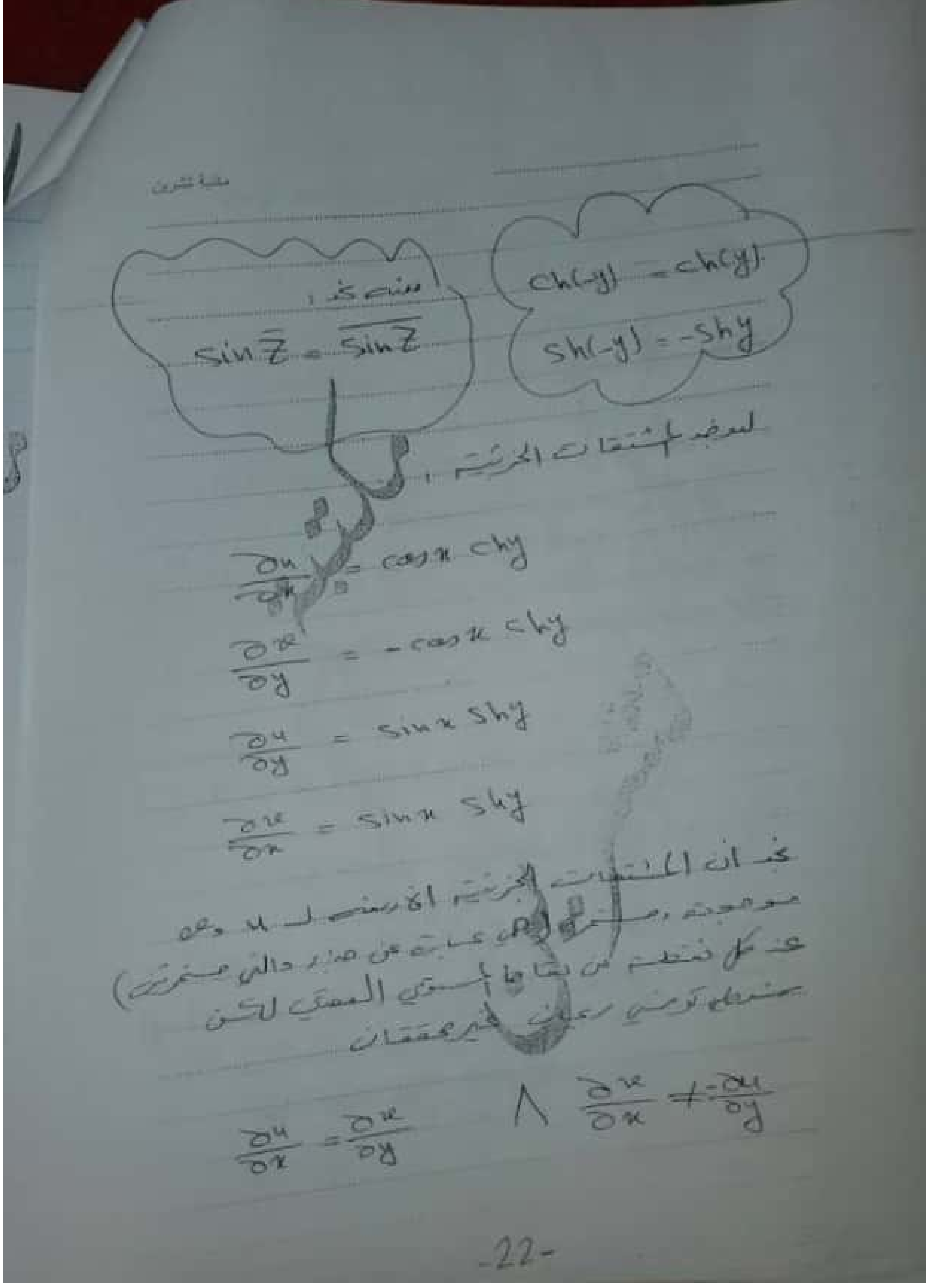
هي العلاقة بين الجيب المثلثي والجيب الزائدي

مثال :
اثبت أن الدالة :
$$f(z) = \sin \bar{z}$$
انها دالة غير تحليلية

الحل :

$\sin \bar{z} = \sin(x - iy) = \sin x \, ch(-y) + i \cos x \, sh(-y)$

$= \sin x \, ch y - i \cos x \, sh y$



نستنتج :

$$\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$$

$$ch(-y) = ch(y)$$

$$sh(-y) = -sh y$$

لنوجد المشتقات الجزئية :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \, ch y$$

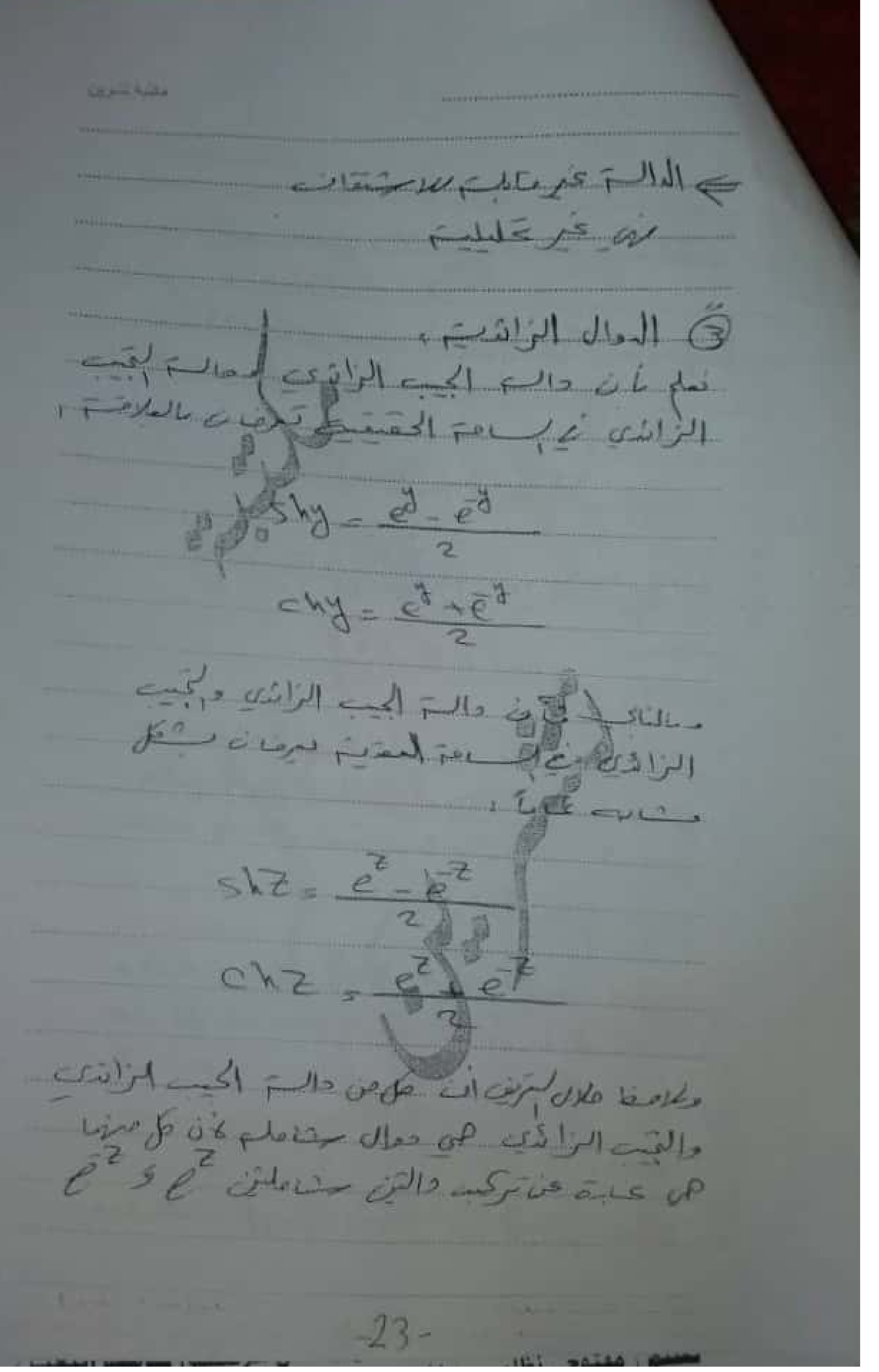
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\cos x \, ch y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \, sh y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sin x \, sh y$$

نجد أن المشتقات الجزئية الأولى لـ u و v موجودة ومستمرة (هي عبارة عن جداء دوال مستمرة) عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي لكن شرطا كوشي ريمان غير محققان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial x} \neq -\frac{\partial u}{\partial y}$$



⇐ الدالة غير قابلة للاشتقاق

فهي غير تحليلية

③ الدوال الزائدية :

نعلم بأن دالة الجيب الزائدي والدالة التجيب الزائدي في الساحة الحقيقية تعرفان بالعلاقة :

$$sh\,y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

$$ch\,y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$$

بالمثل فإن دالة الجيب الزائدي والتجيب الزائدي في الساحة العقدية تعرفان بشكل مشابه كما يلي :

$$sh\,z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$ch\,z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

ونلاحظ من خلال التعريف أن كل من دالة الجيب الزائدي والتجيب الزائدي هي دوال شاملة لأن كل منهما هي عبارة عن تركيب دالتين شاملتين e^{z} و e^{-z}

وتركيب دالتين زائديتين هي دالة زائدية

• كذلك الأمر تعرف الدالة الظل الزائدي وظل التمام الزائدي بالعلاقتين :

$$th\,z = \tanh z = \frac{sh\,z}{ch\,z}$$

$$\coth z = \frac{ch\,z}{sh\,z}$$

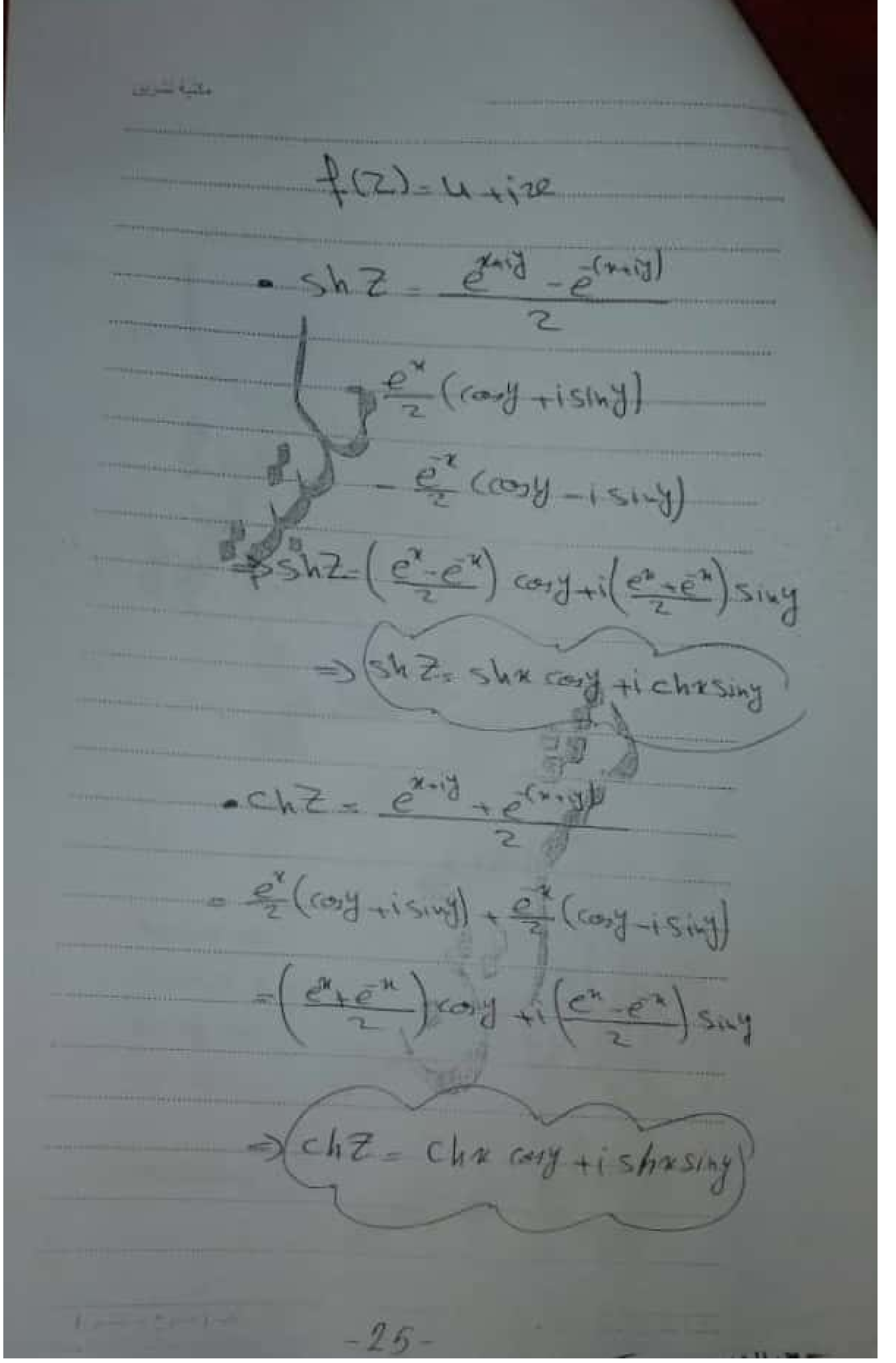
وقسمة دالتين تحليليتين هي دالة تحليلية أي ، دالة الظل الزائدي هي دالة تحليلية عند كل نقاط المستوي العقدي باستثناء جذور المعادلة

$$ch\,z = 0$$

وكذلك دالة ظل التمام الزائدي هي دالة تحليلية عند كل نقاط المستوي العقدي باستثناء جذور المعادلة :

$$sh\,z = 0$$

• ونكتب كل من $sh\,z$ و $ch\,z$ بالشكل :



مكتبة تشرين

$f(z) = u + iv$

- $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{x+iy} - e^{-(x+iy)}}{2}$

$= \dfrac{e^{x}}{2}(\cos y + i\sin y)$

$- \dfrac{e^{-x}}{2}(\cos y - i\sin y)$

$\Rightarrow \operatorname{sh} z = \left(\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)\cos y + i\left(\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)\sin y$

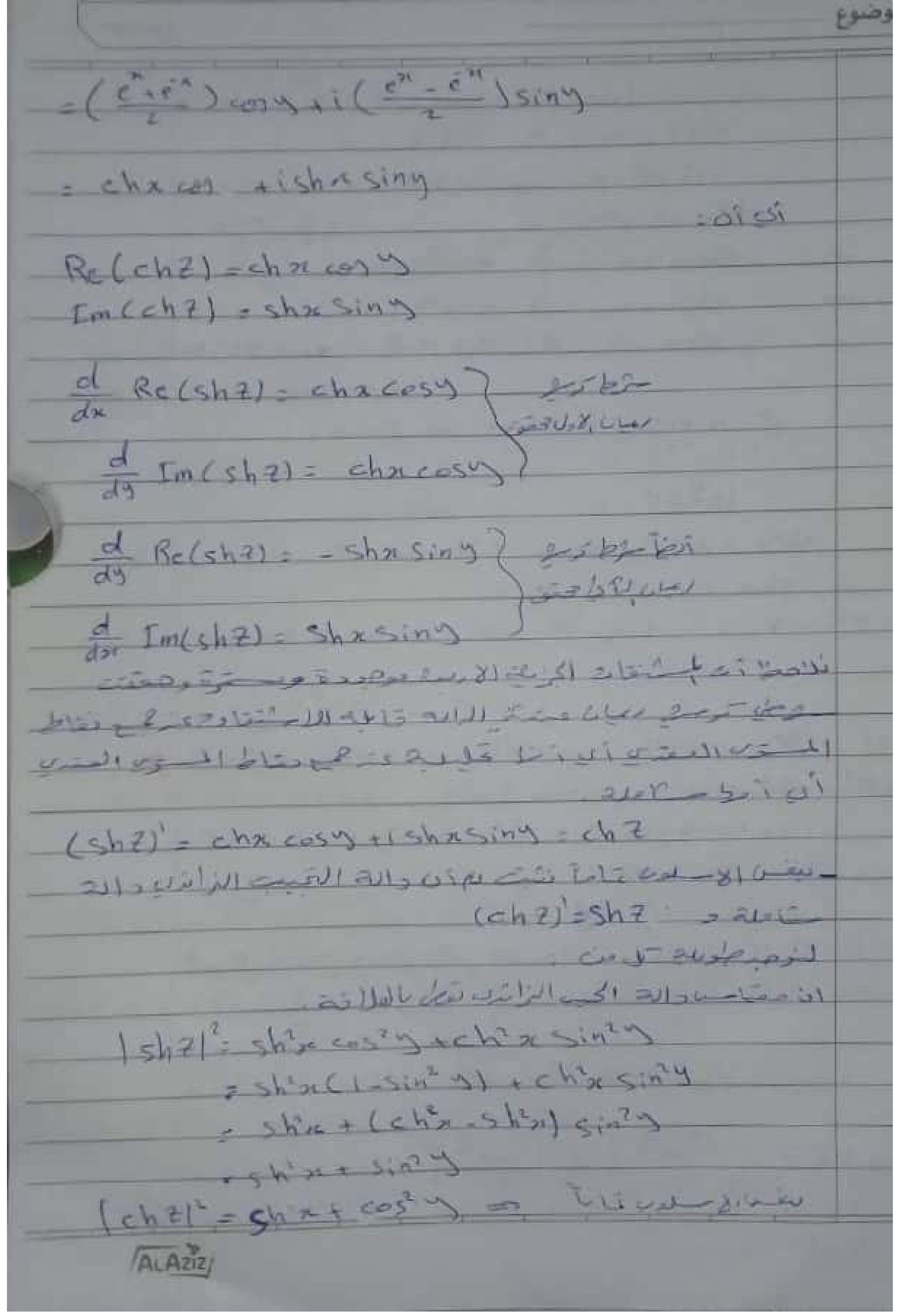
$\Rightarrow \operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$

- $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{x+iy} + e^{-(x+iy)}}{2}$

$= \dfrac{e^{x}}{2}(\cos y + i\sin y) + \dfrac{e^{-x}}{2}(\cos y - i\sin y)$

$= \left(\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)\cos y + i\left(\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)\sin y$

$\Rightarrow \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$



$$= \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\cos y + i\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\sin y$$

$$= \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$$

أي أن:

$$\operatorname{Re}(\operatorname{ch} z) = \operatorname{ch} x \cos y$$
$$\operatorname{Im}(\operatorname{ch} z) = \operatorname{sh} x \sin y$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Re}(\operatorname{sh} z) = \operatorname{ch} x \cos y$$
$$\frac{d}{dy}\operatorname{Im}(\operatorname{sh} z) = \operatorname{ch} x \cos y$$

شرط كوشي ريمان الأول محقق

$$\frac{d}{dy}\operatorname{Re}(\operatorname{sh} z) = -\operatorname{sh} x \sin y$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{Im}(\operatorname{sh} z) = \operatorname{sh} x \sin y$$

تحقق شرط كوشي ريمان الثاني محقق

نلاحظ أن المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة وتحقق شرطي كوشي ريمان ومنه الدالة قابلة للاشتقاق في جميع نقاط المستوي العقدي أي أنها تحليلية في جميع نقاط المستوي العقدي أي أنها صحيحة

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y = \operatorname{ch} z$$

بنفس الأسلوب تماماً نثبت بأن دالة الجيب التمام الزائدي دالة تحليلية و $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$

المطلوب الثالث:

ان مقياس دالة الجيب الزائدي يعطى بالعلاقة.

$$|\operatorname{sh} z|^2 = \operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y$$
$$= \operatorname{sh}^2 x(1-\sin^2 y) + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y$$
$$= \operatorname{sh}^2 x + (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)\sin^2 y$$
$$= \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y$$

$$|\operatorname{ch} z|^2 = \operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y \Rightarrow$$ بنفس الأسلوب تماماً

ALAziz

الموضوع

وهنا نبين المعادلتين عكس ايجاد حلول المعادلة:

$sh\,z = 0 \quad \wedge \quad ch\,z = 0$

$|sh\,z|^2 = 0 \Leftarrow sh\,z = 0$

وبالتالي فإن: $sh^2 x + \sin^2 y = 0$

$\Rightarrow sh^2 x = 0 \quad \wedge \quad \sin^2 y = 0$

$\Rightarrow sh\,x = 0 \quad \wedge \quad \sin y = 0$

$\Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad y = n\pi \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ومنه:

$z = x + iy = 0 + in\pi \Rightarrow z = n\pi i$

أما اذا كان:

$|ch\,z|^2 = 0 \quad \Leftarrow ch\,z = 0$

$sh^2 x + \cos^2 y = 0 \Rightarrow sh^2 x = 0 \quad \wedge \quad \cos^2 y = 0$

$\Rightarrow sh\,x = 0 \quad \wedge \quad \cos y = 0$

$\Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad y = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

نثبت صحة العلاقة لا يوجد في القاموس: $|ch\,z|^2 = sh^2 x + \cos^2 y$

$|ch\,z|^2 = ch^2 x \cos^2 y + sh^2 x \sin^2 y$

$= (1 + sh^2 x)\cos^2 y + sh^2 x \sin^2 y$

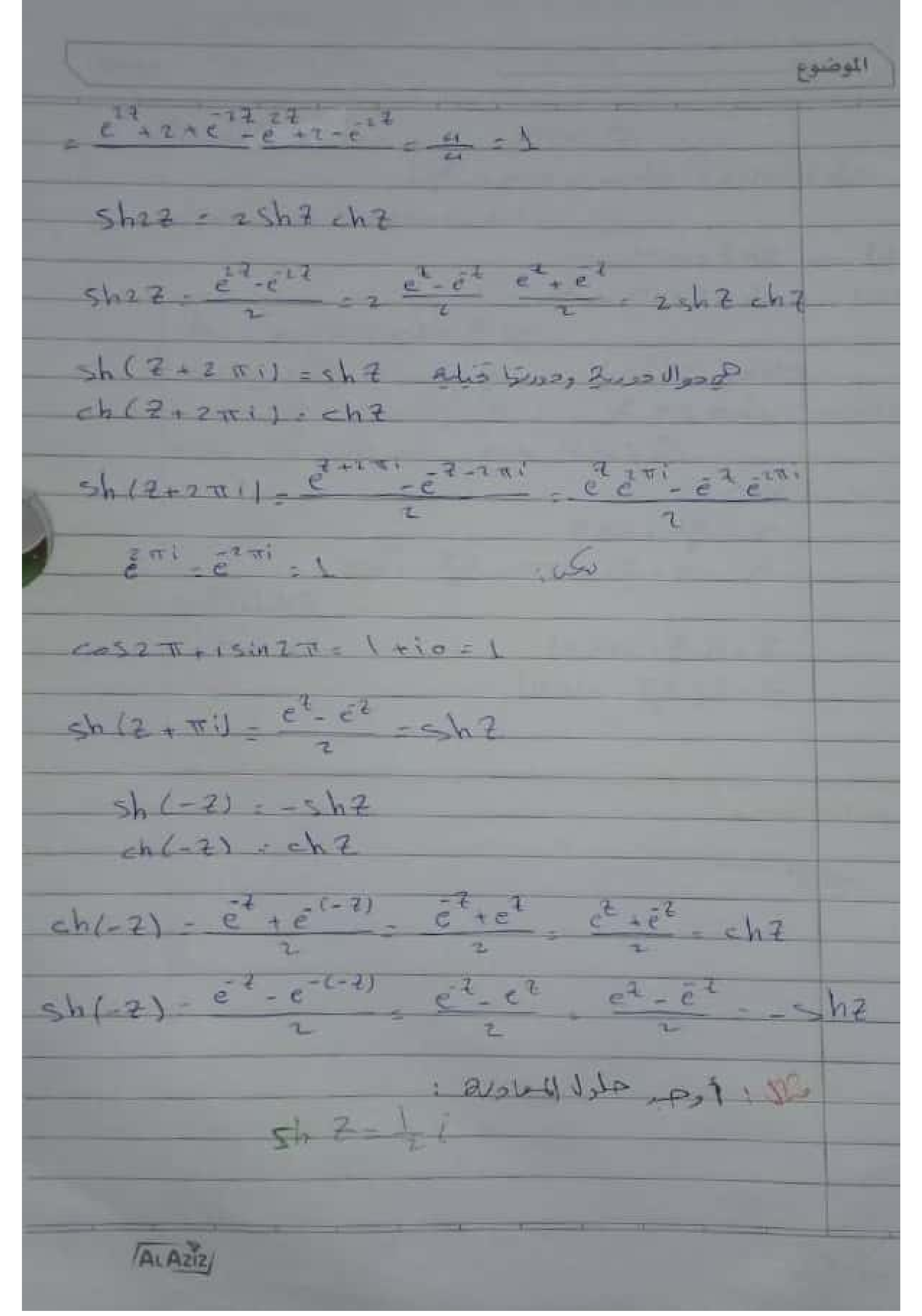
$\Rightarrow z = (\frac{\pi}{2} + n\pi)\, i$

جميع الخواص التي تحققها دالتي الجيب الزائدي والتجيب الزائدي في الساحة الحقيقية تحققها دالتي الجيب الزائدي والتجيب الزائدي في الساحة العقدية:

مثال: $ch^2 z - sh^2 z = 1$

$ch^2 z - sh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 =$

ALAZIZ



$$= \frac{e^{2z}+2+e^{-2z}-e^{2z}+2-e^{-2z}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$sh2z = 2\,shz\,chz$$

$$sh2z = \frac{e^{2z}-e^{-2z}}{2} = 2\,\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\,\frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = 2\,shz\,chz$$

$sh(z+2\pi i) = sh\,z$ الدوال دورية ودورتها تخيلية

$ch(z+2\pi i) = ch\,z$

$$sh(z+2\pi i) = \frac{e^{z+2\pi i}-e^{-z-2\pi i}}{2} = \frac{e^{z}e^{2\pi i}-e^{-z}e^{-2\pi i}}{2}$$

$e^{2\pi i} = e^{-2\pi i} = 1$ لكن

$$\cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 + i0 = 1$$

$$sh(z+\pi i) = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = sh\,z$$

$sh(-z) = -sh\,z$

$ch(-z) = ch\,z$

$$ch(-z) = \frac{e^{-z}+e^{-(-z)}}{2} = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = ch\,z$$

$$sh(-z) = \frac{e^{-z}-e^{-(-z)}}{2} = \frac{e^{-z}-e^{z}}{2} = -\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = -sh\,z$$

مثال: أوجد حلول المعادلة:

$$sh\,z = \frac{1}{2}i$$

موضوع الدوال الزائدية [illegible]

[illegible]

الحل: نفرض أن : $z = x + iy$

$$\operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y = \frac{1}{2} i$$

واعتماداً على تساوي عددين عقديين يكون :

(1) ... $\operatorname{sh} z \cos y = 0$

(2) ... $\operatorname{ch} x \sin y = \frac{1}{2}$

أما : $\cos y = 0 \Leftarrow y = \frac{\pi}{2} + n\pi$

نعوض في ② نجد أن : $\operatorname{ch} x(\pm 1) = \frac{1}{2}$

$\operatorname{ch} x = \pm \frac{1}{2}$ مستحيل

لأن أكبر قيمة ch هي الواحد [illegible]

وأما $\operatorname{sh} x = 0 \Leftarrow x = 0$ نعوض في ②

$$1 \cdot \sin y = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$$

$$y = \pi - \frac{\pi}{6} + 2n\pi = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$$

إذاً الحلول هي :

$$z = i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)$$

$$z = i\left(\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right)$$

[illegible]